

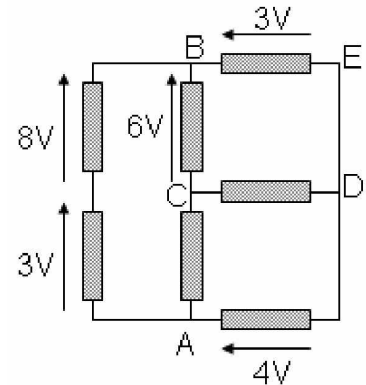
**TD de Physique**  
**CLASSES MPSI-PCSI-Techno**  
**AMAMI MOHAMED**  
**IPEST**

Travaux dirigés d'Electrocinétique n° 1

**Exercice 1 : Loi des mailles**

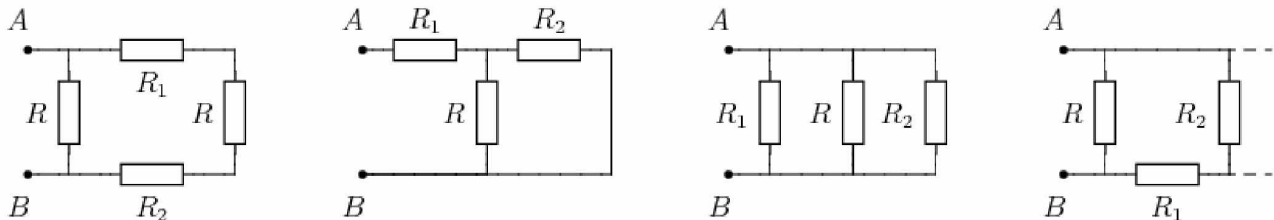
On considère le circuit ci-contre, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.

1. Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.
2. Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?
3. Déterminer les tensions  $u_{AC}$ ,  $u_{CD}$  et  $u_{DF}$ .



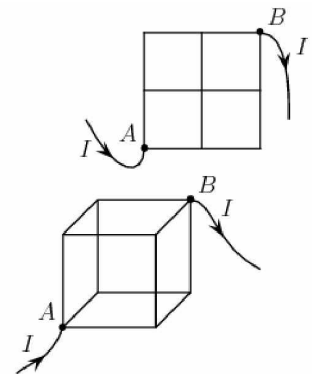
**Exercice 2 : Série ou parallèle ?**

Les résistors  $R_1$  ou  $R_2$  sont-ils en série, en parallèle ou ni l'un ni l'autre ? Lorsque c'est possible, déterminer les résistance équivalente entre les points A et B.



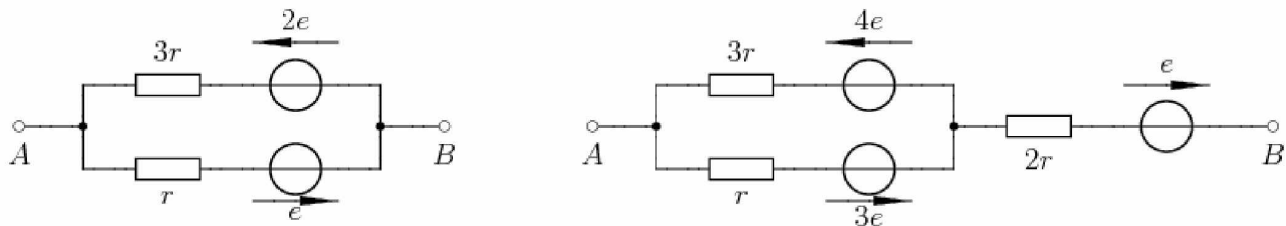
**Exercice 3 : Résistance équivalente, utilisation des symétries**

Chaque trait représente un résistor de résistance R. En utilisant les symétries, déterminer, pour chacun des circuits ci-contre, l'intensité dans chaque conducteur. En déduire la résistance équivalente du réseau vue entre les points A et B.



**Exercice 4 : Equivalents Thévenin/Norton**

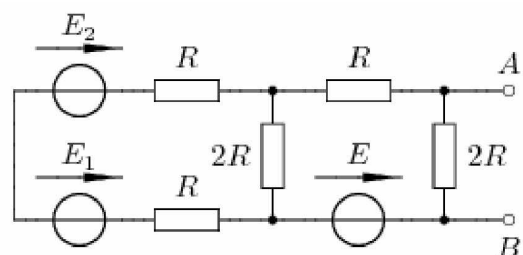
Déterminer les générateurs de tension et de courant équivalents à ces deux dipôles :



**Exercice 5 : Circuit actif équivalent à un résistor**

En associant les dipôles, donner la valeur littérale, puis numérique de E pour laquelle le réseau compris entre les points A et B est équivalent à un résistor.

A.N. :  $R=5\Omega$ ,  $E_1=2V$ ,  $E_2=8V$ .

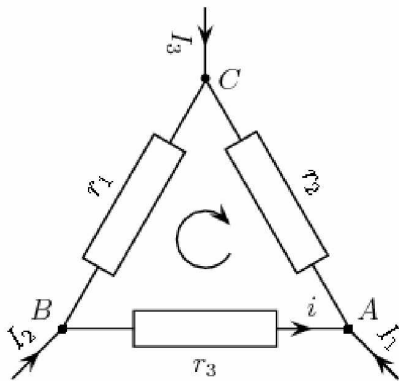


### Exercice 6 : Adaptation d'impédance

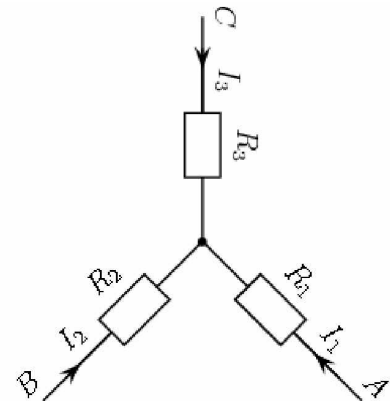
Un générateur modélisé par son modèle de Thévenin ( $E, r$ ) est branché sur une résistance variable  $R$ .

1. Déterminer le courant circulant dans la résistance  $R$ .
2. Déterminer la puissance  $P$  dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ . Tracer la courbe  $P(R)$  pour  $E=100V$  et  $R=10\Omega$ .
3. Montrer que cette courbe passe par un maximum  $P_{max}$  pour une valeur  $R_0$  de la résistance  $R$  que l'on déterminera. Exprimer  $P_{max}$ .

### Exercice 7 : Théorème de Kennelly



Association triangle

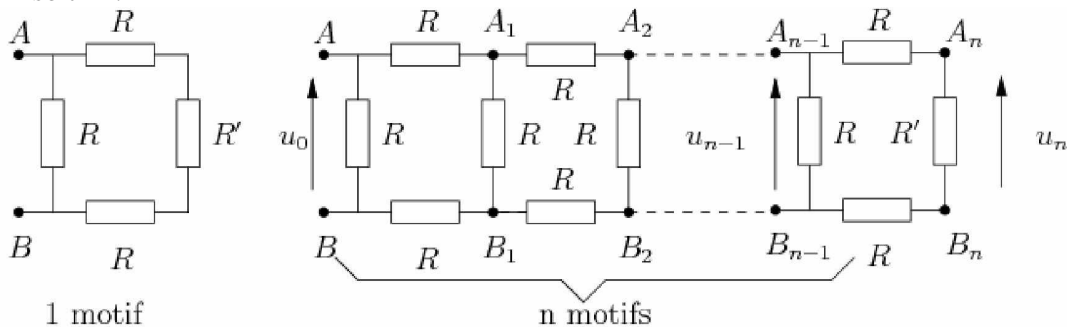


Association étoile

1. Exprimer  $U_{CB}$  et  $U_{AC}$  en fonction de  $I_1$  et  $I_2$  dans le montage étoile.
2. Exprimer  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de dans l'association triangle.
3. En déduire  $R_1, R_2, R_3$  en fonction de  $r_1, r_2$  et  $r_3$ .

### Exercice 8 : Résistance itérative

1. Déterminer la valeur du résistor  $R'$  pour que la résistance équivalente du réseau de gauche entre A et B soit  $R'$ .

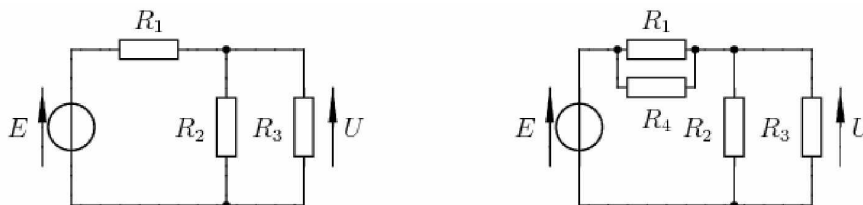


2. En déduire la valeur de la différence de potentiel  $u_n$  dans le réseau suivant si  $R'$  est donnée par le résultat de 1) et si  $u_0$  est appliquée entre A et B.
3. Quelle est la résistance  $R_{AB}$  du réseau entre les bornes A et B du réseau de droite.

Travaux dirigés d'Electrocinétique n° 2

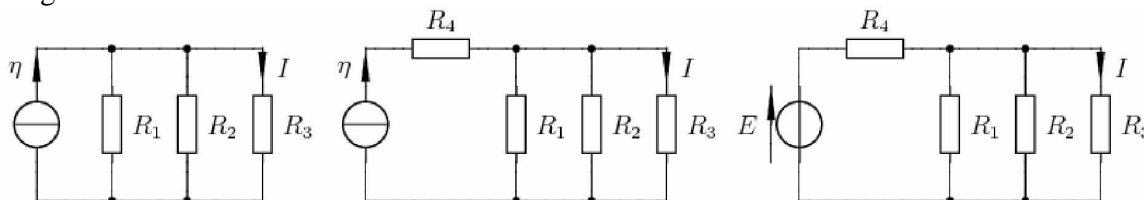
**Exercice 1 : Diviseur de tension**

Utiliser les formules des diviseurs de tension pour déterminer la tension  $U$  aux bornes de  $R_3$  dans les montages suivants.



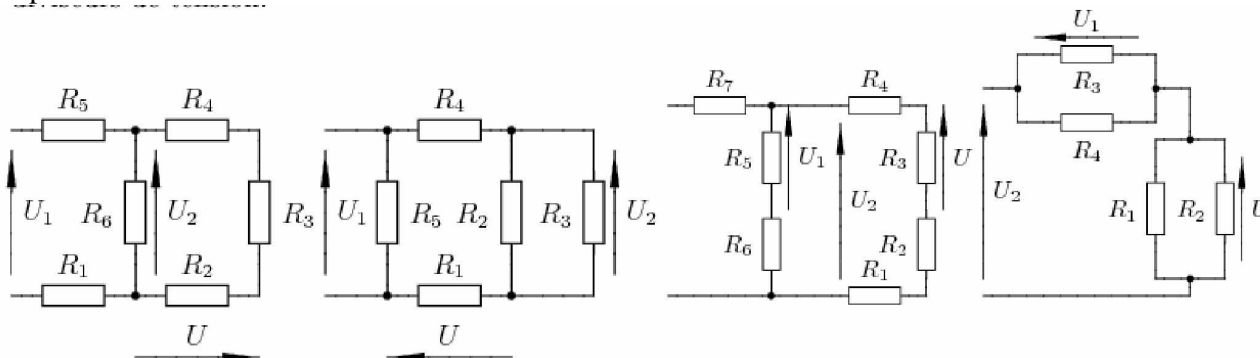
**Exercice 2 : Diviseur de courant**

Utiliser les formules des diviseurs de courant pour déterminer l'intensité du courant  $i$  qui traverse  $R_3$  dans les montages suivants.



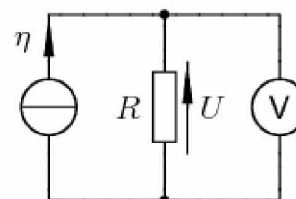
**Exercice 3 : Ponts diviseurs de tension**

Dans les circuits suivants, exprimer  $U$  en fonction de  $U_1$  ou  $U_2$  et des résistances en utilisant les formules du pont diviseur de tension.



**Exercice 4 : Voltmètre réel**

On considère le montage ci-dessous dans lequel  $R$  est une résistance variable. Le voltmètre mesure la tension aux bornes de  $R$ .

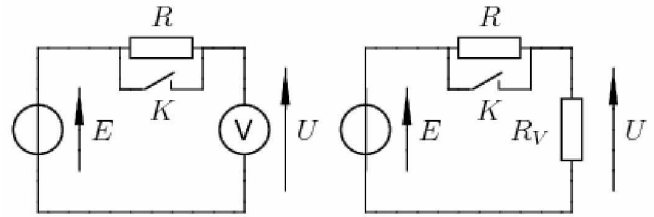


1. Quelle est la tension  $U_0$  affichée si le voltmètre est idéal (c'est à dire si sa présence ne modifie en rien les grandeurs électriques présentes dans le circuit.)
2. On considère maintenant que le voltmètre est modélisé par un résistor de résistance  $R_V$  (sa résistance d'entrée). Quelle est la tension  $U$  affichée par le voltmètre ? A partir de quelle valeur de  $R$  la tension affichée par le voltmètre s'écarte-t-elle de plus de 5% de  $U_0$  ?

### Exercice 5 : Mesure de la résistance d'entrée d'un voltmètre

On considère le montage ci-contre. Le voltmètre peut-être modélisé par un résistor de résistance  $R_V$  (résistance d'entrée).

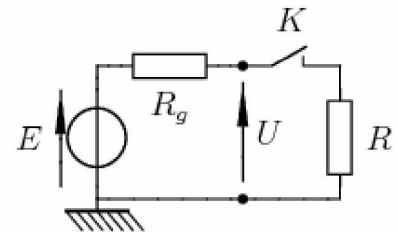
1. L'interrupteur  $K$  est tout d'abord fermé. Quelle est la valeur de la tension affichée par le voltmètre  $U=U_0$  si on considère qu'il est idéal, c'est à dire équivalent à un résistor de résistance infinie ?



2. On ouvre ensuite  $K$ , quelle est la valeur indiquée si le voltmètre est idéal ?
3. Même question si le voltmètre est équivalent à un résistor de résistance  $R_V$  ? Exprimer alors  $U$  en fonction de  $E$ ,  $R$  et  $R_V$ .
4. Pour quelle valeur de  $R$  a-t-on  $U=U_0/2$  ?
5. En pratique, pour un voltmètre numérique, on se contentera plutôt d'obtenir  $U = \frac{9}{10}U_0$ . Expliquer pourquoi.

### Exercice 6 : Mesure de la résistance de sortie d'un GBF

On a représenté un générateur de tension réel par son équivalent Thévenin ( $E, r$ ). On cherche à mesurer  $r$ , la résistance interne de ce générateur, sa fem étant  $E$ .

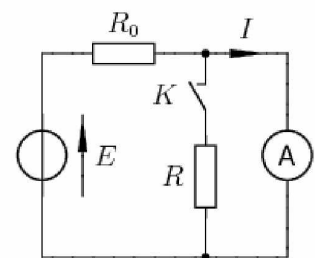


1. Dans un premier temps, on mesure  $U$ , la tension à ses bornes lorsque l'interrupteur  $K$  est ouvert. Quelle est, en fonction des données, la valeur de la tension  $U_0$  mesurée ? Le voltmètre est parfait.
2. On ferme ensuite  $K$ .  $R$  est un résistor de résistance  $R$  variable. Quelle est, en fonction des données, la valeur de la tension  $U$  mesurée ?
3. Pour quelle valeur de  $R$  obtient-on  $U=U_0/2$  ? En déduire une méthode de mesure de  $r$ . Quelle est l'ordre de grandeur de la valeur mesurée sur les GBF utilisés en TP ?

### Exercice 7 : Mesure de la résistance d'entrée d'un ampèremètre.

On considère le montage représenté ci-dessous avec une résistance variable  $R$ . On gardera toujours  $R \ll R_0$ .

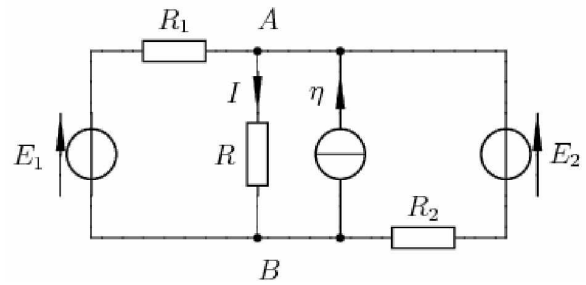
1. Lorsque l'interrupteur  $K$  est ouvert, quelle est l'intensité  $I_0$  mesurée par l'ampèremètre si on suppose qu'il est idéal, (c'est à dire si sa présence ne modifie en rien les grandeurs électriques présentes dans le circuit) ?
2.  $K$  est maintenant fermé.
  - a. Pour quelle valeur de  $R$ , l'intensité du courant mesurée vaut-elle  $I_0/2$  ? On rappelle que  $R \ll R_0$  et on supposera l'ampèremètre équivalent à un résistor de résistance  $R_a \ll R_0$ .
  - b. En déduire une méthode de mesure de  $R_a$ .
3. Quelle est l'utilité de  $R_0$  ?



**Exercice 8 : Application des théorèmes généraux**

Calculer l'intensité  $I$  du courant qui traverse  $R$  en utilisant les méthodes suivantes :

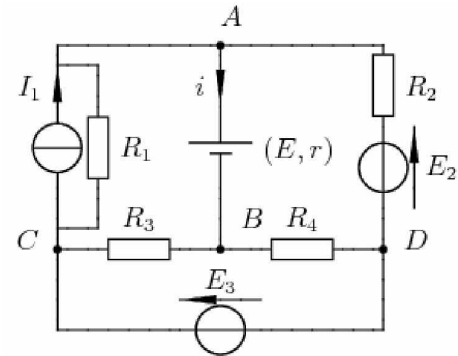
1. Lois de Kirchhoff (on se contentera d'établir un système d'équations).
2. Loi des nœuds en terme de potentiel.
3. La simplification du circuit.



**Exercice 9 : Loi des nœuds en terme de potentiel**

Considérons le montage ci-contre. On cherche à déterminer le courant  $i$  qui traverse le générateur de fem  $E$  et de résistance  $r$ . Etablir un système d'équations permettant de résoudre le problème

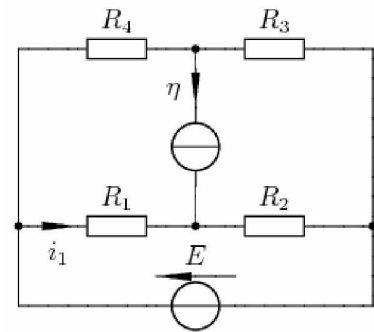
AN :  $i_1=10\text{mA}$  ;  $E_2=E_3=10\text{V}$  ;  $R_1=R_3=1\text{k}\Omega$  ;  $R_2=R_4=500\Omega$  ;  $E=2\text{V}$  et  $r=10\Omega$ .



**Exercice 10 : Théorème de superposition**

On considère le circuit représenté ci-dessous dans lequel on cherche à déterminer le courant  $i_1$  qui traverse le résistor  $R_1$ .

1. Par une méthode directe
2. En calculant les courants imposés dans  $R_1$  par chaque générateur présent dans le circuit :
  - a.  $i'_1$  si le générateur  $E$  est seul :  $\eta=0$  ce qui revient à remplacer le générateur de courant par un interrupteur ouvert.
  - b.  $i''_1$  si le générateur  $\eta$  est seul :  $E=0$  ce qui revient à remplacer le générateur de tension par un interrupteur fermé.
  - c. Comparer  $i_1$  calculé en 1. et la somme  $i'_1 + i''_1$ . Conclure.

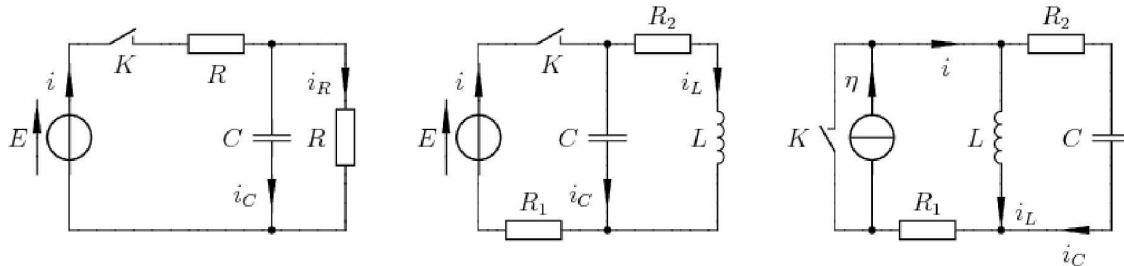


**Remarque :** la deuxième méthode est généralisable à tout réseau linéaire comportant des résistors et des sources linéaires indépendantes (théorème de superposition).

Travaux dirigés d'Electrocinétique n° 3

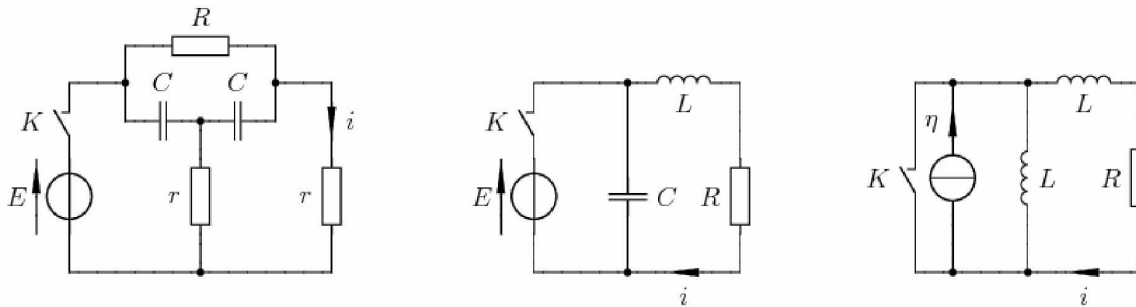
**Exercice 1 : Comportement de C et L en régime permanent et à l'instant initial.**

Que vaut l'intensité du courant  $i$  à  $t=0^+$  sachant que l'on ferme l'interrupteur  $K$  à  $t=0$  dans les deux premiers circuits alors qu'on l'ouvre à  $t=0$  dans le dernier ?  
Même question en régime permanent.



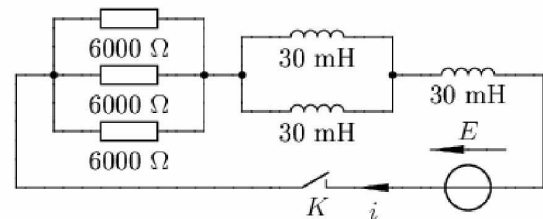
**Exercice 2 : Comportement de C et L en régime permanent et à l'instant initial.**

Que vaut l'intensité du courant  $i$  à  $t=0^+$  sachant que l'on ferme l'interrupteur  $K$  à  $t=0$  dans les deux premiers circuits alors qu'on l'ouvre à  $t=0$  dans le dernier ? Même question en régime permanent.



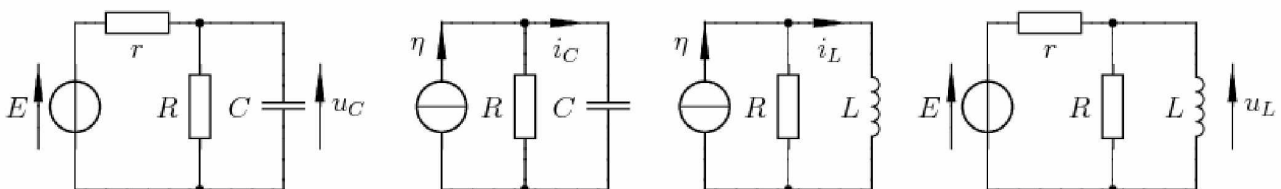
**Exercice 3 : Régime transitoire inductif**

Initialement, toutes les intensités sont nulles. A l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ .  
Donner la loi de variation en fonction du temps de l'intensité du courant traversant le générateur.



**Exercice 4 : Détermination rapide de la réponse d'un circuit**

On considère les quatre circuits suivants :

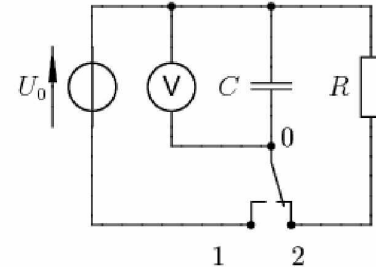


Pour  $t < 0$ ,  $E$  et  $\eta$  valent 0 et pour  $t > 0$ , ils sont constants. A  $t=0$ , les condensateurs sont déchargés et les bobines parcourues par aucun courant. Donner l'évolution de  $i_L$ ,  $i_C$ ,  $u_L$  et  $u_C$ .

**Exercice 5 : Mesure d'une résistance par la méthode perte de charge**

Pour mesurer une résistance  $R$  élevée de plusieurs mégaohms, on réalise le montage électrique ci-dessous où  $C$  est un condensateur réel de résistance de fuite  $R_f$  non représentée sur la figure, on donne  $C=10\mu\text{F}$ .

- On abaisse l'interrupteur double en position 1 ; lorsque le condensateur est chargé, le voltmètre numérique  $V$  (supposé parfait) indique la tension  $U_0=6,00\text{V}$ .
- On ouvre l'interrupteur (position intermédiaire) ; au bout du temps  $t_1=20\text{s}$ , le voltmètre  $V$  indique la tension  $U_1=5,10\text{V}$ .
- On charge de nouveau le condensateur sous la tension  $U_0$  (interrupteur dans la position 1) puis on l'abaisse brusquement dans la position 2 ; au bout du temps  $t_2=20\text{s}$ , le voltmètre indique  $U_2=4,60\text{V}$ .

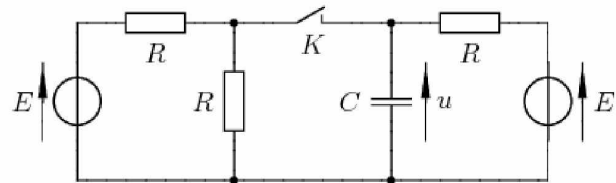


1. En déduire les valeurs de la résistance de fuite  $R_f$  du condensateur et de la résistance  $R$ .
2. Dans la dernière expérience, déterminer à quel instant le condensateur est déchargé de la moitié de son énergie initiale.

**Exercice 6 : Circuit RC comportant deux générateurs.**

Les générateurs sont allumés depuis longtemps et à l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur.

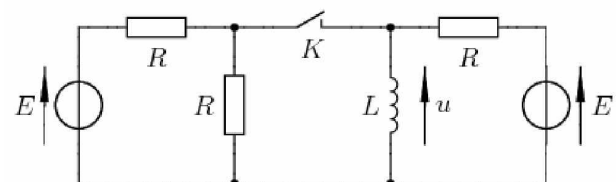
Déterminer la différence de potentiel  $u(t)$  aux bornes du condensateur.



**Exercice 7 : Circuit RL comportant deux générateurs.**

Les générateurs sont allumés depuis longtemps et à l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur.

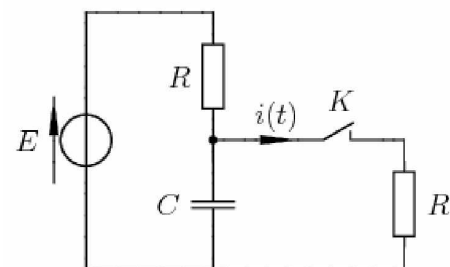
Déterminer la différence de potentiel  $u(t)$  aux bornes de la bobine.



**Exercice 8 : Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.**

Soit le montage représenté ci-contre. Pour  $t < 0$ , le circuit est en régime permanent, c'est à dire que le générateur de tension est allumé depuis longtemps et  $K$  ouvert depuis longtemps. On ferme  $K$  à  $t=0$ .

1. Donner la valeur initiale  $i(0)$  et la valeur finale  $i(\infty)$  de  $i(t)$ .
2. Déterminer  $i(t)$ .
3. Tracer son allure.

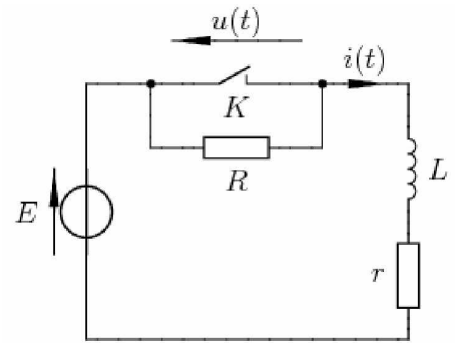




**Exercice 9 : Etincelle de rupture**

Soit le circuit représenté ci-contre.

1. Quelle est la valeur de l'intensité  $i(0)$  dans le circuit sachant que le courant est établi depuis longtemps ( $K$  fermé) ?
2. On ouvre  $K$  à  $t=0$ . Déterminer  $i(t)$  et tracer son allure. Que se passe-t-il si  $R$  devient très grande ?
3. Déterminer  $u(t)$  et tracer son allure. Que se passe-t-il si  $R$  devient très grande ?



**Exercice 10 : Circuit RLC parallèle**

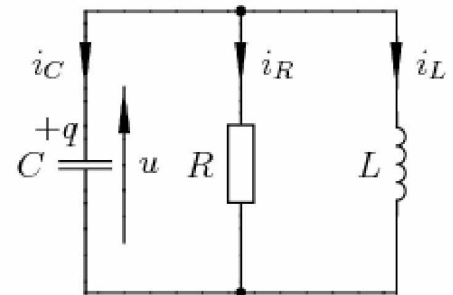
Soit le circuit représenté ci-contre.

1. Montrer que  $i_L$  vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0$$

Donner l'expression de  $\omega_0$ , de  $Q$  et de  $R_C$ , la valeur de la résistance critique pour laquelle on observe un régime critique. Exprimer  $Q$  en fonction de  $R$  et  $R_C$ . Que peut-on dire de  $Q$  si  $R \gg R_C$ .

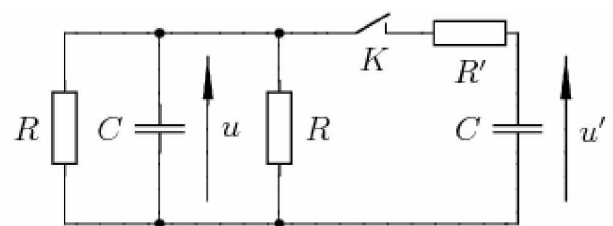
2. Montrer que  $q$  vérifie la même équation différentielle.
3. En supposant que  $C$  est initialement chargé sous une tension  $U_0$ , calculer les expressions approchées de  $i_L(t)$  si  $Q \gg 1$ .
4. Toujours dans le cas  $Q \gg 1$ , calculer les diverses énergies emmagasinées en fonction du temps ainsi que l'énergie totale présente dans la bobine et le condensateur. Commenter.



**Exercice 11 : Circuit RC du deuxième ordre**

Dans le circuit représenté ci-contre, à l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et le condensateur de droite est chargé sous une tension  $u_0'$  tandis que celui de gauche est non chargé.

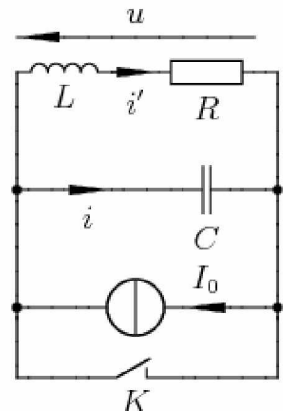
1. Trouver l'équation différentielle de ce réseau relative à la tension  $u$  aux bornes du condensateur de gauche.
2. Démontrer que cette différentielle du second ordre n'admet que des solutions exponentielles réelles décroissantes.
3. Combien de conditions initiales est-il nécessaire d'écrire pour résoudre cet exercice ? Les justifier convenablement.
4. Donner la forme littérale de la fonction  $u(t)$ .
5. Représenter l'allure de  $u(t)$ .



### Exercice 12 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de courant

Soit le circuit représenté ci-contre pour lequel,  $I_0=50\text{mA}$  ;  $L=0,5\text{H}$  ;  $r=100\Omega$  et  $C=10\mu\text{F}$ .

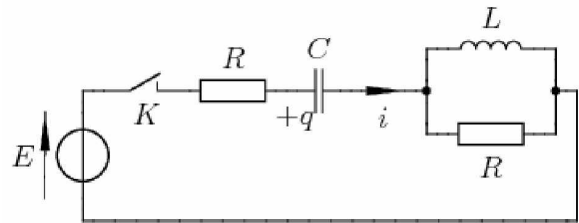
- Pour  $t < 0$ ,  $K$  est fermé depuis longtemps.
  - $K$  est ouvert à  $t=0$ .
1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ .
  2. En déduire la facteur de qualité du circuit.
  3. Déterminer  $u(t)$  et tracer son allure.
  4. Déterminer  $i(t)$  et  $i'(t)$ , les représenter.
  5. Commenter le cas idéal où  $R \rightarrow 0$ .



### Exercice 13 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension.

Soit le circuit représenté ci-dessous avec  $L=0,5\text{H}$  ;  $R=1\text{k}\Omega$  et  $C=4\mu\text{F}$ .  
A  $t=0$ , on ferme  $K$  et le condensateur est déchargé.

1. Déterminer la valeur littérale de  $u_C$ , la tension aux bornes du condensateur à  $t=0$  puis au bout d'un temps infini.
2. Même question en ce qui concerne  $u_C$ , la tension aux bornes de la bobine.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $q$ , la charge du condensateur. Préciser le type de régime auquel on a affaire.
4. Préciser les conditions initiales qui permettent de résoudre cette équation.
5. Tracer l'allure des graphes  $q(t)$  et  $i(t)$ .



**Travaux dirigés d'Electrocinétique n°4**
**Exercice 1 : Association  $RL$  parallèle.**

On place en parallèle une résistance  $R=40\Omega$  et une bobine  $L=0,16H$ .

Entre leurs bornes communes, on applique la tension  $u$  du secteur (valeur efficace  $U=220V$  ;  $50Hz$ ).

1. Calculer les valeurs efficaces  $I_R$  et  $I_L$  des courants traversant  $R$  et  $L$  ainsi que leur phase à l'origine  $\varphi_R$  et  $\varphi_L$  si on prend la phase à l'origine de  $u$  comme origine des phases.
2. Calculer, par deux méthodes, l'intensité efficace totale  $I$  et son déphasage  $\varphi$  par rapport à la tension.

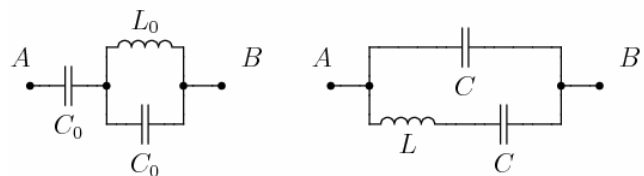
**Exercice 2 : Complexes et méthode de Fresnel.**

1. On travaille dans cet exercice avec des tensions et intensités sinusoïdales de pulsation  $\omega$ .
  - a. Déterminer l'impédance complexe  $Z_1$  (forme algébrique et exponentielle) d'un dipôle  $AB$  formé d'une résistance  $R_1$  en série avec une bobine d'inductance  $L$ .  
A.N.  $R_1=100\Omega$  ;  $L=0,1H$  ;  $\omega=1000rad.s^{-1}$ .
  - b. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I=10mA$ . Dessiner le diagramme de Fresnel en prenant l'origine des temps de telle sorte que le courant dans  $AB$  s'écrive sous la forme  $i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$ . En déduire  $u_1(t)$  aux bornes de  $AB$ .
  - c. Reprendre la question précédente mais avec  $i(t) = I\sqrt{2} \sin \omega t$ .
2. Soit un dipôle  $BD$  formé d'une résistance  $R_2=100\Omega$  en série avec un condensateur de capacité  $C=10\mu F$ .
  - a. Déterminer l'impédance complexe  $Z_2$  (forme algébrique et exponentielle) de ce dipôle.
  - b. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I=10mA$ . Dessiner le diagramme de Fresnel correspondant et déterminer  $u_2(t)$  la tension aux bornes de  $BD$  si  $i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$ .
3. Le dipôle  $AB$  est placé en série avec le dipôle  $BD$ . Le dipôle  $AD$  ainsi constitué est traversé par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I=10mA$ . Calculer la valeur efficace  $U$  de la tension aux bornes de  $AD$ . Comparer avec  $U_1+U_2$  où  $U_1$  est la valeur efficace de la tension aux bornes de  $AB$  et  $U_2$  est la valeur efficace de la tension aux bornes de  $BD$ .

**Exercice 3 : Impédances équivalentes.**

Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même impédance quelle que soit la fréquence de la source d'alimentation.

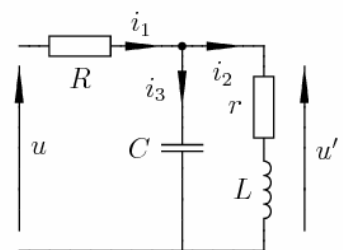
Montrer que l'on peut choisir  $L$  et  $C$  en fonction de  $L_0$  et  $C_0$  pour que les deux dipôles ci-dessus soient équivalents.


**Exercice 4 : Méthode des complexes, méthode de Fresnel**

Soit le circuit représenté ci-contre pour lequel  $u(t) = U_m \cos \omega t$ .

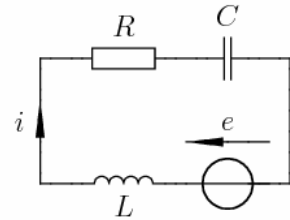
On considère la bobine réelle ( $r, L$ ) comme une résistance  $r$  en série avec une inductance parfaite  $L$ .

1.  $i_1$  est en phase avec  $u$ . En déduire  $C$  en fonction de  $\omega$ ,  $L$  et  $r$ .
2.  $i_1$  et  $i_3$  ont de plus la même valeur efficace. En vous servant également de la représentation de Fresnel, exprimer les réactances  $L\omega$  et  $1/C\omega$  de la bobine et du condensateur en fonction de  $r$ .



**Travaux dirigés d'Electrocinétique n°5**
**Exercice 1 : Circuit RLC série en RSF.**

On considère le circuit ci-contre alimenté par le générateur de tension de f.e.m  $e(t)$  sinusoïdale de fréquence  $f=50\text{Hz}$ ,  $R=500\Omega$ ,  $L=0,1\text{H}$  et  $C=1\mu\text{F}$ . La valeur efficace du courant traversant le circuit est  $I_{eff}=0,03\text{A}$ . En prenant l'intensité comme origine des phases, c'est à dire  $i(t) = I_m \cos \omega t$ , déterminer  $e(t)$ .


**Exercice 2 : Quartz Piezo-électrique : résonance et antirésonance.**

On considère, comme schéma électrique simplifié équivalent d'un quartz piézo-électrique destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge, un dipôle  $AB$  composé de deux branches en parallèle. Dans l'une, une inductance  $L$  pure en série avec un condensateur de capacité  $C$ ; dans l'autre, un condensateur de capacité  $C_0$ . On posera  $\frac{C}{C_0} = a$ , et on gardera les variables  $L$ ,  $C_0$ ,  $\omega$  et  $a$ .

1. Le dipôle  $AB$  étant alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , calculer l'impédance complexe  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}$ . Calculer son module  $|\underline{Z}| = Z$ , et son argument  $\varphi$ .
2. Etudier en fonction de la pulsation l'impédance  $\underline{Z}$ ; pour cela :
  - on précisera tout particulièrement les limites de  $Z$  quand  $\omega$  tend vers zéro ou l'infini ;
  - on appellera  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les valeurs finies non nulles de la pulsation pour lesquelles  $Z$  est respectivement nulle et infinie. Quel est le comportement électrique simple de  $AB$  pour  $\omega = \omega_1$  et  $\omega = \omega_2$  ? Donner  $Z = f(C_0, \omega, \omega_1, \omega_2)$ .
3. Représenter graphiquement  $Z$  en fonction de  $\omega$ .
4. Préciser par un graphe à main levée, et sans aucun calcul, comment qualitativement est modifiée la courbe  $Z = f(\omega)$  si l'on tient compte de la résistance du bobinage d'inductance  $L$ .

**Exercice 3 : Circuit RLC parallèle en RSF.**

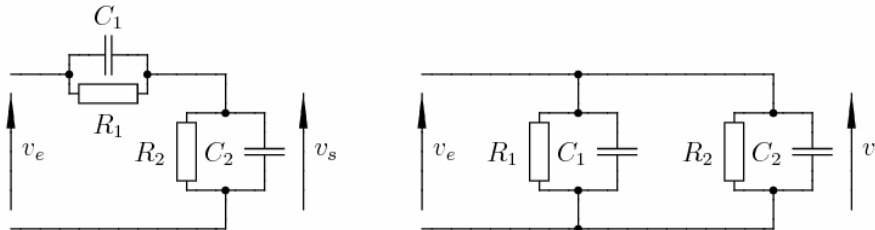
1. On considère un circuit RLC parallèle en régime alternatif sinusoïdal. Exprimer l'admittance complexe  $\underline{Y}$  de ce circuit.
2. Mettre  $\underline{Y}$  sous la forme réduite en l'exprimant uniquement en fonction de  $R$ ,  $Q$  (facteur de qualité) et  $u$  (pulsation réduite) avec :

$$Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$$

3. En déduire l'impédance complexe  $\underline{Z}$  en fonction des mêmes variables réduites. Etudier les variations du module de  $\underline{Z}$  en fonction de la fréquence. On montrera la présence d'un maximum que l'on précisera. Trouver les deux valeurs  $u_1$  et  $u_2$  pour lesquelles  $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .
4. Montrer que  $|u_2 - u_1| = \frac{1}{Q}$ . A la fréquence de résonance, quelle est l'impédance simple équivalente du circuit ?
5. Que se passe-t-il loin de la fréquence de résonance ?

**Exercice 4 : Diviseur de tension et diviseur de courant sans effet de filtrage.**

On se place en RSF. Un diviseur de tension sans effet de filtrage se réalise à l'aide de deux impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  de même structure. L'impédance  $Z_2$  étant imposée, calculer  $R_1$  et  $C_1$  pour que le rapport d'atténuation  $H_V = \frac{v_s}{v_e}$  pour le montage de gauche et  $H_I = \frac{i_s}{i_e}$  pour le montage de droite soit constant et égal à  $k$  ( $k < 1$ ).

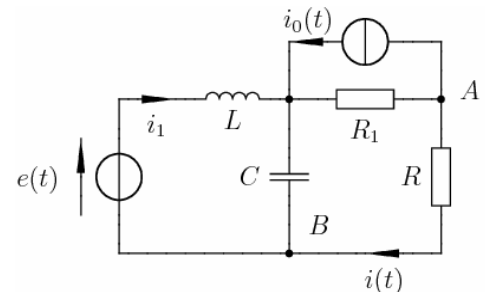


**Exercice 5 : Résolution d'un circuit en RSF**

On étudie le montage représenté ci-contre,  $e(t)$  est la f.e.m d'un générateur de tension sinusoïdale :  $E(t) = E_m \cos \omega t$ .

$i_0(t)$  est le c.e.m d'un générateur de courant alternatif sinusoïdal en phase avec le précédent.

Déterminer le courant  $i(t)$  traversant la résistance R entre A et B sous la forme  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

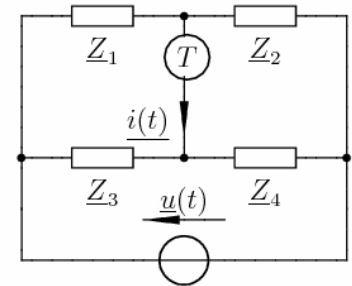


**Exercice 6 : Pont de Wheatstone en régime sinusoïdal et application.**

On considère un pont de Wheatstone alimenté par un générateur de tension alternative  $u(t) = U_m \cos \omega t$ . T est un écouteur téléphonique d'impédance complexe  $Z_T$ .

1. Quelle condition doivent satisfaire les impédances complexes  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  et  $Z_4$  pour que  $i$  soit nul ?
2. Quel est le rôle de T ?
3. Application :

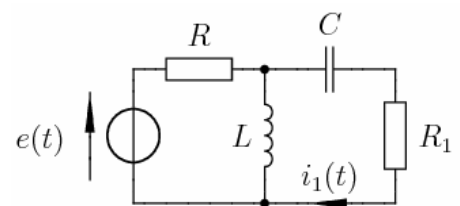
- Les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  sont respectivement des résistances étalons  $R_1$  et  $R_2$ .
- $Z_3$  est un résistor de résistance variable R en série avec un condensateur de capacité C.
- $Z_4$  est un résistor de résistance variable R identique en parallèle avec un condensateur de même capacité C.



Trouver les conditions d'équilibre du pont et en déduire une application.

**Exercice 7 : Puissance moyenne**

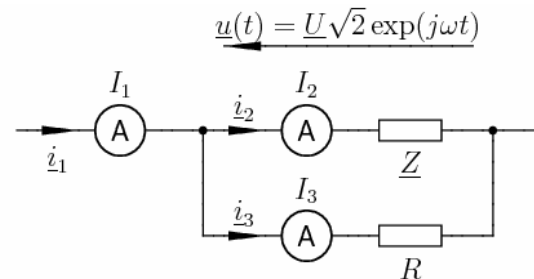
On considère le circuit représenté ci-contre. Il est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale  $e(t) = E_0 \sqrt{2} \sin \omega t$ . Calculer la puissance moyenne dissipée dans le résistor de résistance  $R_1$ .



### Exercice 8 : Mesure d'une puissance moyenne : méthode des trois ampèremètres.

On peut déterminer le facteur de puissance d'un dipôle quelconque  $\underline{Z}$  alimenté en RSF en utilisant le montage représenté ci-contre.

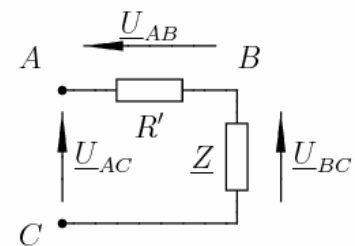
1. Quelle est puissance moyenne consommée dans  $\underline{Z}$  en fonction de ces trois intensités et de  $R$  ?
2. Application : Un abonné EDF ( $U=220V$ ,  $50Hz$ ) branche soit une plaque chauffante ( $I_3=12A$ ), soit un moteur inductif ( $I_2=30A$ ), soit les deux en parallèle ( $I_1=40A$ ). En déduire le facteur de puissance de  $\underline{Z}$ .



### Exercice 9 : Mesure d'une puissance moyenne : méthode des trois voltmètres

Pour mesurer la puissance moyenne consommée par une impédance  $Z=R+jX$ , on fait successivement trois mesures de tension :  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  et  $U_{AC}$ .

1. Montrer que l'on peut écrire la puissance consommée dans l'impédance  $Z$  en fonction de  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{AC}$  et de  $R'$  seulement.
2. Calculer cette puissance pour  $U_{AB}=30V$ ,  $U_{BC}=153V$ ,  $U_{AC}=178V$  et  $R'=10\Omega$ .
3. En déduire la résistance  $R$  et la réactance  $X$  du dipôle  $BC$ .



### Exercice 10 : Relèvement d'un facteur de puissance.

Un moteur électrique (inductif) fonctionnant sous une tension efficace  $U=220V$  et une fréquence  $f=50Hz$  consomme une puissance  $P=5kW$ . Son facteur de puissance est  $\cos \varphi = 0,7$ .

1. Déterminer l'expression  $i(t)$  de l'intensité du courant qui le traverse.
2. Déterminer la capacité  $C$  du condensateur à placer en dérivation sur le moteur pour relever le facteur de puissance à 1.
3. Même question si on veut un facteur de puissance 0,9 :  $C'$ .

### Exercice 11 : Facteur de puissance, méthode de Fresnel

Un abonné de l'EDF dispose d'une source de tension sinusoïdale de fréquence  $50Hz$  et de valeur efficace  $U=220V$ .

1. Il branche un appareil de chauffage (purement résistif) qui consomme  $P_1=1kW$  et un moteur inductif (modélisable par une résistance  $A$  et une réactance  $B$  :  $\underline{Z}=A+jB$ ) de puissance moyenne  $P_2=2kW$  et de facteur de puissance  $\cos \varphi_2 = 0,5$ . Définir les intensités efficaces complexes  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  dans les deux dérivation et  $\underline{I}$  dans la ligne d'alimentation et en déduire le facteur de puissance de l'installation.
2. L'EDF recommande d'améliorer le facteur de puissance. Pour cela on adjoint un condensateur en dérivation. Quelle est la valeur de  $C$  qui permet d'obtenir un facteur de puissance égal à 1 ?

### Exercice 12 : Relèvement d'un facteur de puissance

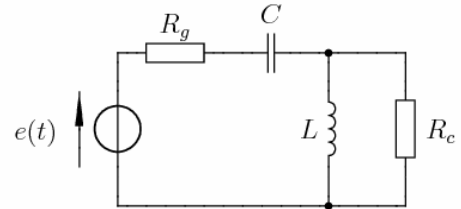
Un moteur électrique fonctionnant sous une tension  $U=220V$  et une fréquence  $f=50Hz$  consomme une puissance  $P=12kW$  avec un facteur de puissance  $\cos \varphi = 0,6$ .

Déterminer la capacité du condensateur à placer en dérivation sur le moteur pour relever le facteur de puissance à  $0,8$ . En déduire le pourcentage d'amélioration des pertes en ligne.

### Exercice 13 : Adaptation d'impédance

Un générateur de tension alternative sinusoïdale de f.e.m  $e(t) = E_0 \sqrt{2} \cos \omega t$  et d'impédance interne complexe  $\underline{Z} = R + jX$  alimente une charge d'impédance complexe  $\underline{Z}' = R' + jX'$ .

1. Montrer que la puissance électrique reçue par la charge est maximale si  $\underline{Z}' = \underline{Z}^*$  où  $\underline{Z}^*$  est le conjugué de  $\underline{Z}$ .
2. On suppose dans cette question, que  $Z$  est réelle et vaut  $R_g$  et que la charge est aussi réelle et a pour valeur  $R_c$ . Pour réaliser l'adaptation en puissance, on intercale entre le générateur et la charge, un module L-C selon le schéma ci-contre. Montrer que l'adaptation n'est possible que si  $R_c > R_g$  et exprimer  $L$  et  $C$  en fonction des données.



### Exercice 14 : Aspect énergétique du facteur de qualité

Calculer l'énergie électromagnétique  $\varepsilon$  emmagasinée à l'instant  $t$  dans un dipôle RLC série fonctionnant en régime sinusoïdal forcé.

Vérifier que  $\varepsilon$  est indépendant de  $t$  à la résonance d'intensité ( $\omega = \omega_0$ ).

Interpréter ce résultat à l'aide d'un bilan énergétique.

Pour  $\omega \neq \omega_0$ , calculer la moyenne temporelle  $\langle \varepsilon \rangle$  de  $\varepsilon$  ainsi que l'énergie  $W$  dissipée dans le dipôle en une période  $T$ .

Montrer que  $\frac{\langle \varepsilon \rangle}{W}$  s'exprime simplement en fonction du facteur de qualité  $Q$  du dipôle et du rapport

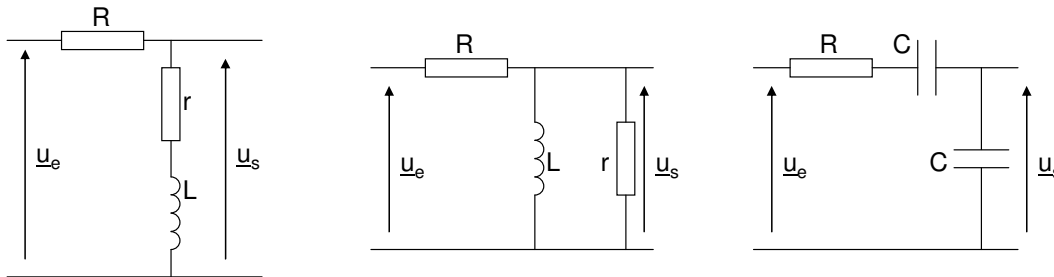
$$u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Examiner le cas particulier  $u=1$  et proposer une définition énergétique du facteur de qualité  $Q$ .

## Travaux dirigés d'Electrocinétique n°6

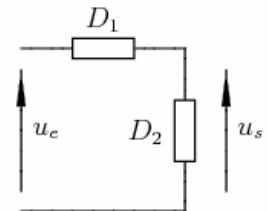
### Exercice 1 : Fonction de transfert.

Déterminer les fonctions de transfert des montages ci-après. Prévoir qualitativement leur comportement asymptotique.



### Exercice 2 : Identification d'un dipôle.

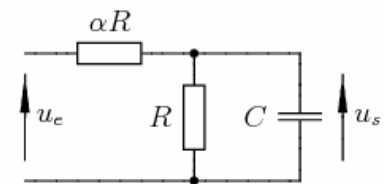
Un dipôle est constitué d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité. Ces trois composants sont répartis de manière inconnue entre D1 et D2. On alimente le circuit avec une tension continue  $E=15V$ , on mesure  $i=15mA$ . Si on alimente le circuit avec une tension sinusoïdale, on s'aperçoit qu'il s'agit d'un filtre passe-bande de fréquence de résonance  $f_0 = 1,16kHz$  et de bande passante à  $-3dB$  de  $0,34 kHz$ .



Déterminer la structure complète du circuit et les valeurs numériques de R, L et C.

### Exercice 3 : Filtre électrique du premier ordre.

Soit le circuit représenté ci-contre et pour lequel  $u_e$  est une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et  $u_s$  la tension de sortie.  $\alpha$  peut varier de 1 à 10,  $R=1k\Omega$  et  $C=2\mu F$ .



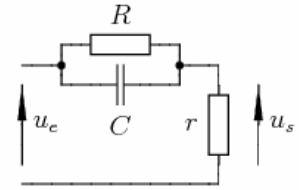
1. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Déterminer la fonction de transfert H de ce filtre et la mettre sous la forme 
$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$
. Préciser la signification de  $G_0$  et  $\omega_0$ .

3. Tracer le diagramme de Bode en amplitude pour  $\alpha=1$  puis  $\alpha=10$  sur la même figure.
4. Calculer l'impédance d'entrée  $\underline{Z}_e$  de ce filtre.



**Exercice 4 : Filtre électrique du premier ordre.**

Soit le circuit représenté ci-contre et pour lequel  $u_e$  est une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et  $u_s$  la tension de sortie.



1. Déterminer sans calcul la nature du filtre
2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  de ce filtre et la mettre sous

la forme  $\underline{H} = \frac{H_0}{H_1}$  avec  $\underline{H}_0 = G_0 \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$  et  $\underline{H}_1 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$ . On précisera les expressions de  $G_0$ ,

$\omega_0$  et  $\omega_1$ .

3. Tracer les diagrammes de Bode de  $\underline{H}_0$  et  $\underline{H}_1$  sur le même graphe (un graphe pour les gains et un graphe pour les phases). On prendra  $R=10k\Omega$ ,  $r=1,1k\Omega$  et  $C=0,1\mu F$
4. En déduire les diagrammes de Bode du filtre.

**Exercice 5 : Tracé d'un diagramme de BODE.**

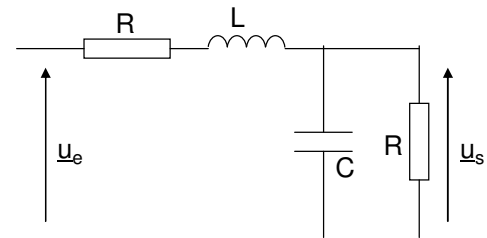
Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{10\omega_0}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{40\omega_0}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{100\omega_0}\right)}$$

**Exercice 6 : Filtre d'ordre 2**

On étudie le filtre schématisé ci-contre.

1. Déterminer la fonction de transfert du montage.
2. Quelle est la nature du filtre ? Retrouver ces propriétés grâce aux comportements limites des composants.
3. Tracer les diagrammes de Bode du filtre dans le cas où  $\frac{L}{2R} = RC = \frac{1}{\omega_0}$ .



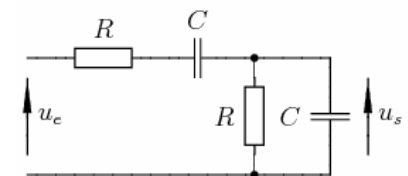
**Exercice 7 : Filtre de WIEN.**

1. Quelle est la nature du filtre de Wien représenté ci-contre ?
2. Etablir sa fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ où } K, \omega_0 \text{ et } Q \text{ sont des}$$

constantes positives que l'on explicitera et dont on donnera la signification physique.

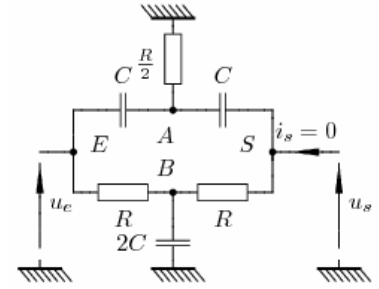
3. Calculer la valeur maximale du gain en dB de ce filtre et la phase correspondante. Quelle est sa bande passante  $\Delta\omega$ ?
4. Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce filtre.



**Exercice 8 : Filtre en double T.**

On considère le filtre suivant en sortie ouverte :  $i_s=0$ .

1. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Exprimer les potentiels complexes des nœuds A et B en fonction de  $\underline{u}_e$ ,  $\underline{u}_s$ , et  $x = RC\omega$ .
3. Exprimer  $\underline{u}_s$  en fonction des potentiels des nœuds A et B. En déduire la fonction de transfert du filtre.
4. Tracer l'allure de son diagramme de Bode en amplitude et en phase.



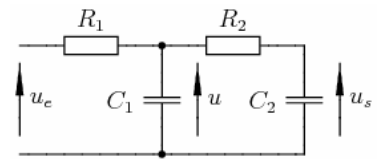
**Exercice 9 : Deux résistances et deux condensateurs.**

On considère le filtre de la figure ci-contre.

1. Prévoir le comportement asymptotique du filtre.
2. Déterminer sa fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$  sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha\omega^2 + j\beta\omega}$$

3. Montrer que l'on peut écrire  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{a}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{b}\right)}$  où a et b sont solutions d'une équation du second degré que l'on explicitera.
4. On donne  $R_1 = 100k\Omega$ ,  $C_1 = 10nF$  et  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_1}{C_2} = 5$ . Déterminer les coefficients a et b (on introduira la constante de temps  $\tau = R_1C_1 = R_2C_2$ ).
5. Tracer le diagramme de Bode en précisant les gains en dB pour les pulsations a et b.

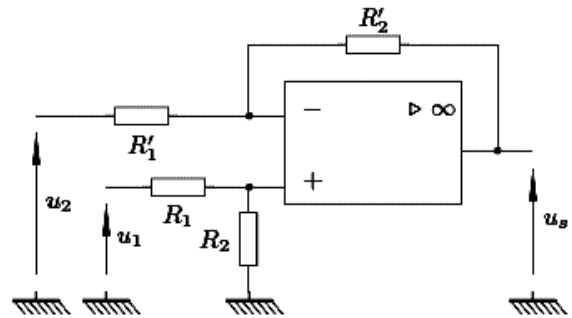


**Travaux dirigés d'Electrocinétique n°7**

**Exercice 1 : Circuit soustracteur.**

On considère le circuit ci-contre dans lequel l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire.

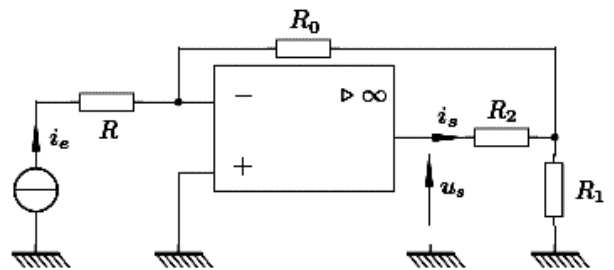
1. Déterminer l'expression de  $u_s$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et des résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R'_1$  et  $R'_2$ .
2. Comment faut-il choisir les résistances pour que  $u_s = u_1 - u_2$ , justifiant ainsi le nom de circuit soustracteur ?



**Exercice 2 : Amplificateur de courant.**

On considère le circuit ci-contre dans lequel l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire.

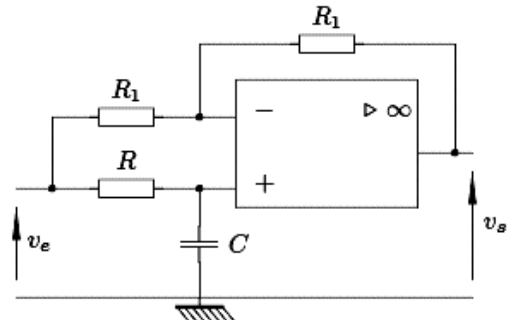
Déterminer, en fonction des résistances, le gain en courant  $G_i = \frac{i_s}{i_e}$ .



**Exercice 3 : Montages en régime sinusoïdal.**

On considère le montage suivant alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale,  $v_e(t) = E\sqrt{2} \cos \omega t$ . L'amplificateur opérationnel est idéal. R est une résistance variable.

1. Déterminer l'expression complexe de la tension de sortie  $v_s$  en fonction de  $v_e$  et des données. En déduire sa valeur efficace et son déphasage  $\phi$  par rapport à  $v_e$ .
2. Quel rôle joue ce montage ?

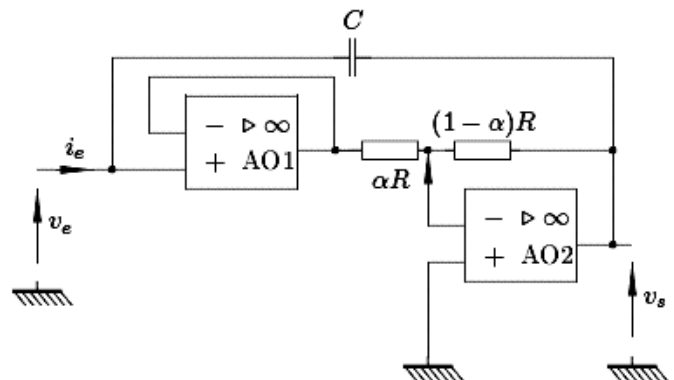


**Exercice 4 : Loi des nœuds et Théorème de Millman en RSF.**

Dans le circuit ci-contre, le curseur partage la résistance R en deux parties  $\alpha R$  et  $(1-\alpha)R$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

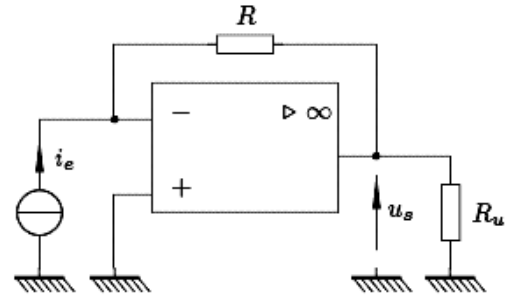
Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1. Calculer le rapport  $\frac{v_s}{i_e}$  en régime sinusoïdal forcé.
2. Quel est l'intérêt de ce montage ?



**Exercice 5 : Amplificateur opérationnel réel.**

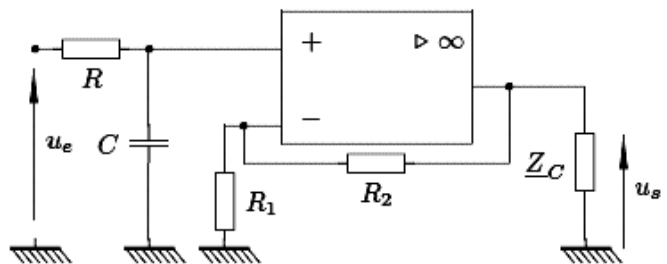
Le circuit représenté ci-contre est un convertisseur courant-tension.



1. Etablir l'expression du gain  $G_{ui} = \frac{u_s}{i_e}$ .
  - a. En considérant l'AO idéal (gain en boucle ouverte  $\mu_0 = \frac{v_s}{v_+ - v_-}$  infini), le gain étant alors noté  $G_0$ .
  - b. En considérant l'AO réel (gain en boucle ouverte  $\mu_0$  élevé mais non infini) : on donnera  $G_{ui}$  en fonction de  $G_0$  et  $\mu_0$ .
2. Calculer les résistances d'entrée  $R_e$  et de sortie  $R_s$  du convertisseur réel.

**Exercice 6 : Filtre actif**

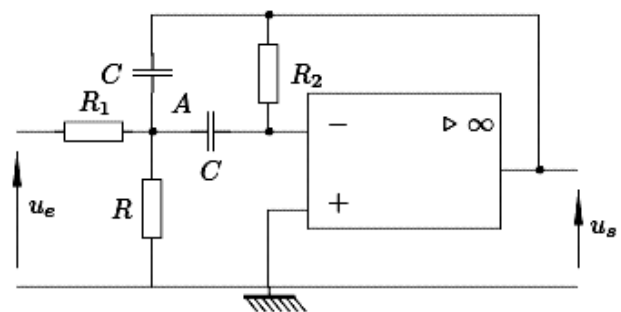
Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel  $R=100\Omega$ ,  $C=10\mu F$ ,  $R_1=1k\Omega$ ,  $R_2=9k\Omega$  et l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.



1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Faire une remarque sur l'influence de  $Z_C$ , l'impédance de charge. Utilité ?
3. Quelle est la fréquence de coupure ?
4. Tracer le diagramme de BODE du filtre.

**Exercice 7 : Filtrage d'un signal.**

Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

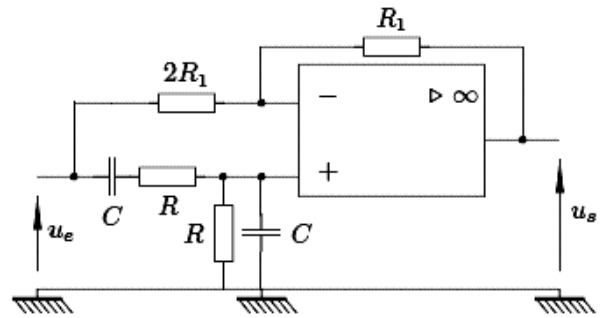


1. Analyser son comportement à basse et à haute fréquence. Quelle est la nature de ce filtre ?
2. Montrer que sa fonction de transfert  $H(jf)$  peut se mettre sous la forme 
$$H(jf) = \frac{-A_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$
 et préciser les expressions de  $A_0$ ,  $Q$  et  $f_0$ .
3. En déduire la bande passante à -3dB du filtre
4. Tracer le diagramme de Bode du filtre pour  $A_0 = 2$  et  $Q = 10$ .
5. Soit  $u_e(t) = 5 + 3 \cos(2\pi f_0 t) - 2 \cos(6\pi f_0 t)$  avec  $A_0 = 2$  et  $Q = 10$ . Dessiner le spectre de  $u_e(t)$ . Déterminer  $u_s(t)$  et dessiner son spectre.

**Exercice 8 : Filtre actif.**

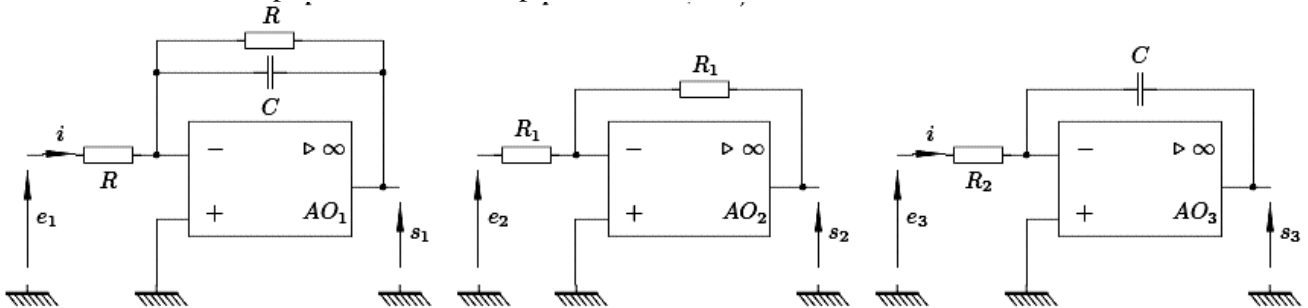
Soit le filtre représenté ci-contre. L'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert  $H(jx)$  en posant  $x = RC\omega$ .
3. Tracer le diagramme de Bode pour le gain.

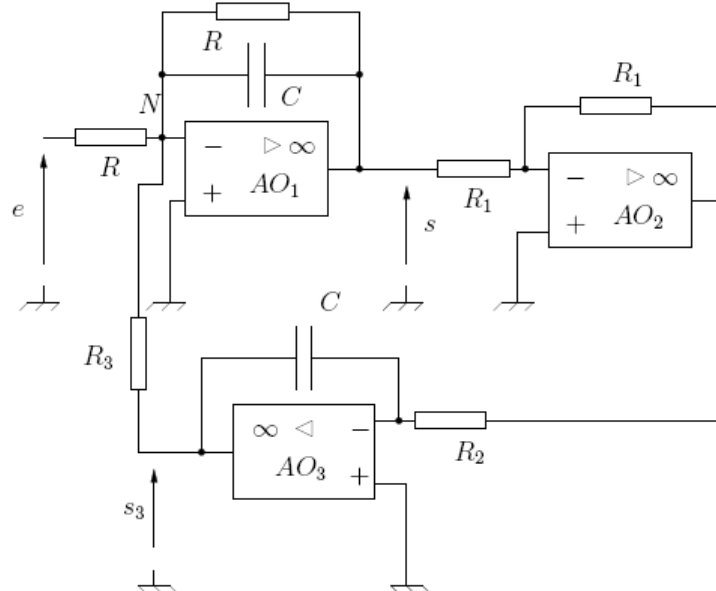


**Exercice 9 : Filtres passe bande.**

1. Calculer les fonctions de transfert des 3 circuits représentés figure 1 alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . Les amplificateurs utilisés sont idéaux.



2. Les trois circuits sont associés suivant le schéma représenté figure 2 :



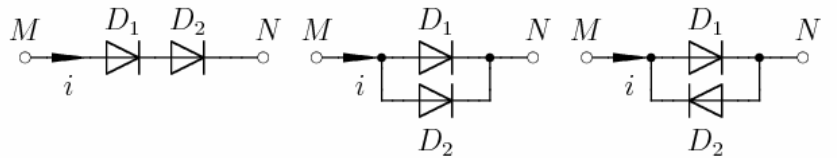
Calculer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{s}{e}$ . Montrer qu'elle est de la forme  $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{-H_0}{1 + j\omega a + \frac{b}{j\omega}}$  où  $H_0$ ,  $a$  et  $b$  font intervenir les éléments constitutifs du circuit.

Quelle est la nature du filtre obtenu ?

**Travaux dirigés d'Electrocinétique n°8**

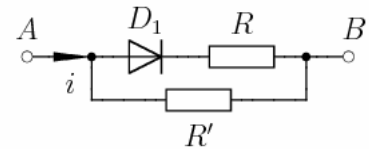
**Exercice 1 : Association de diodes.**

Les diodes utilisées dans les montages suivants ont une tension de seuil  $V_S$ , une résistance dynamique  $r$  faible et une résistance  $R$  infinie en sens bloquant. Tracer l'allure de la caractéristique courant-tension des dipôles  $MN$  ci-dessous en convention récepteur :  $u = v_M - v_N$ .



**Exercice 2 : Caractéristique d'un groupement de dipôles**

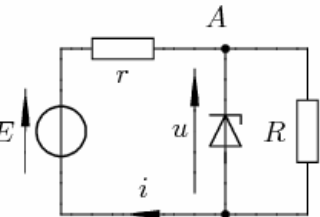
Représenter la caractéristique courant-tension  $i = f(u_{AB})$  du dipôle représenté ci-contre. On considèrera la diode comme parfaite : tension de seuil et résistance en sens direct nulle.



**Exercice 3 : Régulation de tension par diode Zener, résolution graphique.**

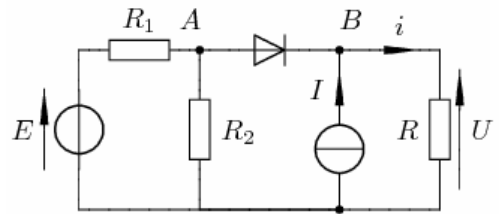
On réalise le circuit suivant dans lequel D est une diode Zener idéale, de tension Zener  $U_Z$  et de résistance dynamique négligeable dans la zone Zener. On fait varier la f.e.m  $E$  de la source.

1. Discuter graphiquement les différentes possibilités de fonctionnement de la diode.
2. Etudier et tracer  $u(E)$  et  $i(E)$ .
3. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?



**Exercice 4 : Générateur de Thévenin et application.**

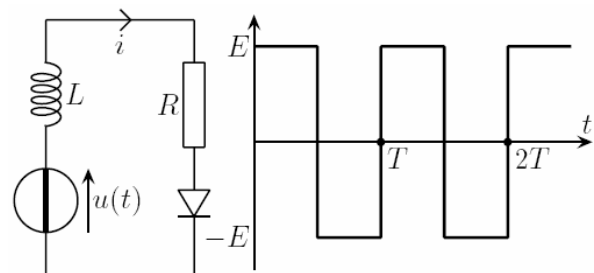
1. Déterminer les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au réseau vu de la diode, entre A et B. On prendra  $R_1 = R_2 = 10\Omega$ ,  $E = 5V$  et  $I = 2A$ .
2. La diode est caractérisée par  $U_S = 0,6V$  et  $r_d = 2\Omega$ . Exprimer la valeur de la tension  $U$  aux bornes de  $R$  selon les valeurs de  $R$ .



**Exercice 5 : Diode en régime transitoire.**

On applique au circuit une tension en créneaux (cf. ci-contre). Ayant  $i=0$  à  $t=0$ , représenter l'évolution ultérieure de  $i(t)$ . On fixe  $\frac{L}{R} = \frac{T}{2}$ .

Calculer la valeur maximale de  $i(t)$  et les intervalles de temps pendant lesquels la diode est passante et pendant lesquels elle est bloquée.

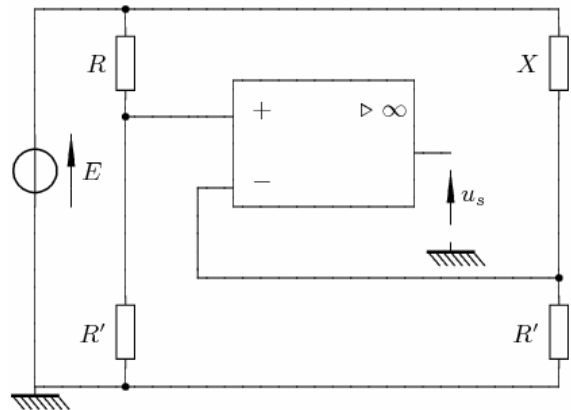


**Exercice 6 : Comparateur.**

L'AO représenté sur la figure ci-contre est idéal, sa tension de saturation est  $V_{sat}$ . Les résistances  $R'$  sont connues, la résistance  $R$  est une boîte à décade alors que la résistance  $X$  est inconnue.

On fait varier  $R$ .

1. Donner la condition sur les résistances  $R$  et  $X$  pour observer le basculement de la tension de sortie de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$ .
2. Quel est l'intérêt du montage ?

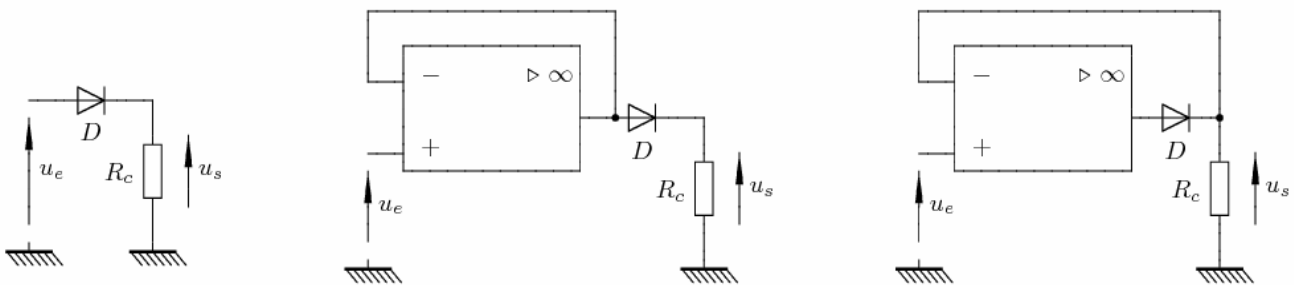


**Exercice 7 : Redressement mono alternance**

On considère les trois montages suivants. L'entrée de chaque montage (repérée par la tension  $u_e$  par rapport à la masse) est connectée à un générateur de tension de f.e.m  $e_g$  et de résistance interne  $R_g$ . Toutes les diodes sont caractérisées par leur tension de seuil  $V_s$  et une résistance dynamique nulle en sens direct.

Les A.O sont idéaux et sont caractérisés par des tensions de saturation égales à  $\pm V_{sat}$ .

Donner pour chaque montage la relation entre  $u_s$  et  $e_g$ .

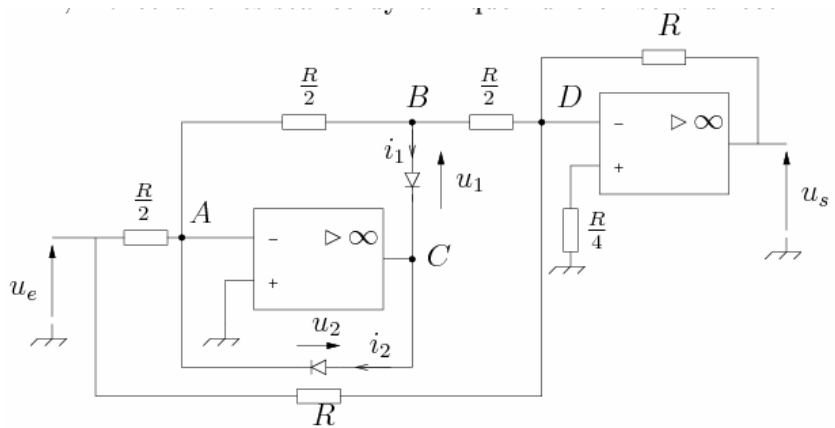


**Exercice 8 : Redressement double alternance sans seuil.**

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont idéaux. On admet qu'ils fonctionnent toujours en régime linéaire.

Les diodes ont une tension de seuil  $V_0 = 0,6V$  et une résistance dynamique nulle en sens direct.

1. Montrer que supposer les deux diodes bloquées est incompatible avec  $u_e \neq 0$ .
2. Soit  $u_e > 0$ . On suppose que  $i_2 = 0$ . Calculer  $u_s$  et vérifier que  $u_2 < V_0$ .
3. Soit  $u_e < 0$ . On suppose que  $i_1 = 0$ . Calculer  $u_s$  et vérifier que  $u_1 < V_0$ .
4. Conclure pour  $u_s$ . On tracera  $u_s$  en fonction de  $u_e$ .
5. A quoi sert en pratique  $R/4$  ?



## Travaux dirigés d'Optique n° 2

**Exercice 1 : Réflexion sur un miroir vertical**

Un homme de taille  $L=1,80\text{m}$  se regarde dans une glace de hauteur  $H$  dont la base se situe à la hauteur  $h$  du sol. Sachant que ses yeux sont à  $l=1,70\text{m}$  du sol, quelles sont les conditions sur  $H$  et  $h$  pour que l'homme puisse admirer son image en entier ?

**Exercice 2 : Champ de vision avec un miroir plan**

Un individu dont les yeux sont situés à une hauteur  $H=1,80\text{m}$  cherche à observer un petit arbre de hauteur  $h=1,50\text{m}$ , situé à une distance  $D=5\text{m}$ , par réflexion dans un miroir plan posé sur le sol. Quelles doivent être les dimensions de ce miroir et où doit-il être placé ?

**Exercice 3 : Avec un microscope**

Sur la platine d'un microscope  $M$ , on dispose une lame de verre  $L_1$  horizontalement. La hauteur de  $M$ , d'axe vertical  $Oz$  peut être réglée grâce à une vis micrométrique graduée. Ayant mis au point sur les poussières recouvrant  $L_1$ , l'indication de la vis est  $z_0=0,000\text{mm}$ . On recouvre alors  $L_1$  d'une autre lame de verre  $L_2$  d'indice  $n$ . Pour mettre au point sur les mêmes poussières que précédemment, il faut remonter  $M$ , la vis indique alors  $z_1=0,634\text{mm}$ . On fait ensuite le point sur les poussières recouvrant la face supérieure de  $L_2$ . La vis indique  $z_2=0,982\text{mm}$ .

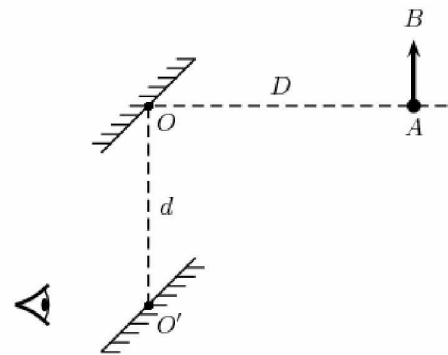
Donner l'expression littérale de  $n$  en fonction de  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$ . Faire l'application numérique.

Rappel : un microscope est un appareil optique fonctionnant de telle sorte que, pour un utilisateur donné, il donne une image nette de ce qui se trouve à une distance  $d$ , inconnue mais constante de l'objectif.

**Exercice 4 : Image d'un objet par un périscope**

Un périscope est un système optique simple formé de deux miroirs plans qui permet par exemple d'observer un défilé par dessus une foule. Les périscope de sous-marins sont des systèmes optiques plus compliqués.

On suppose que les plans de miroirs font un angle de  $45^\circ$  avec la verticale. L'objet  $AB$  observé est lui aussi vertical et à la distance  $D$  du centre  $O$  du miroir supérieur. La distance  $OO'$  entre les deux centres des miroirs est  $d$ .



1. Par construction, déterminer la position de  $A''B''$ , l'image de  $AB$  par le système optique. Quelle est la valeur du grandissement ?
2. Le système optique est-il stigmatique ? Aplanétique ?
3. Tracer deux rayons issus de  $B$  et qui traversent le système optique. Préciser la nature de  $A''B''$ .

**Exercice 5 : Amateur de poisson**

1. Un pêcheur observe une truite assimilée à un segment  $AB=40\text{cm}$  horizontal, à une profondeur  $h=1\text{m}$ , sous une incidence (pour  $A$ )  $i_1=30^\circ$ , puis en se rapprochant sous une incidence  $i'_1=10^\circ$ . Calculer la position des images  $A_1$  et  $A_2$  vues par le pêcheur. Conclure.
2. Le pêcheur étant maintenant quasi vertical par rapport à la truite, quelle est la position apparente du poisson et son diamètre apparent  $\alpha'$  si ses yeux sont situés à  $1\text{m}$  de la surface.



## Travaux dirigés d'Optique n° 3

**Exercice 1 : Diamètre apparent du soleil**

Le diamètre apparent du soleil est de  $30'$ . On réalise son image sur un écran à l'aide d'un miroir sphérique.

- Le miroir doit-il être concave ou convexe ?
- Le rayon de courbure du miroir est de 1 m. Calculer le diamètre de l'image du soleil.

**Exercice 2 : Champ de vision avec un miroir plan**

Soit un miroir sphérique concave ou convexe de focale  $f$ . Déterminer graphiquement deux points conjugués l'un de l'autre, tels que le grandissement transversal soit égal à 2.

Vérifier le résultat à l'aide des relations de conjugaison avec origine au centre et au foyer.

**Exercice 3 : Dîner aux chandelles.**

Une bougie de hauteur 6cm, est placée à 2cm d'un miroir sphérique concave. L'image observée est droite, de hauteur 9cm. Quelle est la position de l'image ? Quelle est la vergence du miroir ?

**Exercice 4 : Une histoire de petite cuillère...**

- 1) A quelle distance dois-je placer mon œil du creux d'une petite cuillère, de rayon de courbure égal à 5 cm, pour voir l'image de mon œil renversée et réduite de moitié ?
- 2) En retournant la petite cuillère, son dos éloigné de mon œil de la distance précédemment calculée, quel sera le grandissement de la nouvelle image observable ?
- 3) Vérifier ces résultats lors de votre prochain repas.

**Exercice 5 : Champ angulaire d'un miroir**

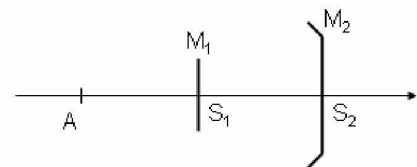
- 1) Un observateur place ses yeux à  $\overline{SA} = -1m$  d'un miroir plan circulaire de rayon  $r=20cm$ , sur l'axe. Calculer l'angle caractérisant la zone d'espace aperçue par réflexion dans ce miroir.
- 2) Même question pour un miroir sphérique de rayon  $R$  et diaphragmé par un cercle de rayon  $r=20cm$ . On discutera selon  $f' > 0$  ou  $f' < 0$ . A.N.  $|f'| = 20cm$ .

**Exercice 6 : Télescope par réflexion**

- 1) Un télescope est constitué par l'association de deux miroirs sphériques ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) de même centre  $O$  et de rayons  $OS_1=R_1$  et  $OS_2=R_2=kR_1$  avec  $k < 1$ . Pour un objet  $A$  infiniment éloigné, le faisceau lumineux frappe la face concave de  $M_1$  puis après réflexion la face convexe de  $M_2$  et retrouve l'axe optique grâce à une ouverture de  $M_1$ . Schématiser le système et la marche du faisceau.
- 2) Si l'on pose  $x = \overline{OA}$  et  $x' = \overline{OA'}$ , trouver l'équation de conjugaison de ce télescope.
- 3) Quel est le foyer image de ce système ? On veut  $F'$  au-delà de  $S_1$ . Quelle est la valeur limite de  $k$  ?

**Exercice 7 : Association de miroirs**

On considère l'association d'un miroir plan  $M_1$  et d'un miroir concave  $M_2$ , de rayon  $R$ , et de même axe optique que  $M_1$ . On place un objet ponctuel  $A$  sur l'axe et toujours à gauche de  $M_1$  (il ne peut pas non plus être collé en  $M_1$  c'est à dire confondu avec  $S_1$ )



- 1) En posant  $x = \overline{S_2A}$ ,  $y = \overline{S_2S_1}$ , déterminer **analytiquement** le lieu  $y=f(x)$  pour lequel  $A$  est confondu avec son image donnée par l'association des deux miroirs.
- 2) Interpréter **physiquement** la branche asymptotique du lieu précédemment mis en évidence.

## Travaux dirigés d'Optique n° 4

**Exercice 1 : Elargisseur de faisceau**

Un faisceau lumineux quasi-parallèle de diamètre  $d=2\text{mm}$  est issu d'une source laser. On désire multiplier ce diamètre par 10.

- 1) L'élargisseur utilise une lentille mince divergente et une lentille mince convergente pour laquelle  $f'_2=50\text{mm}$ . Calculer  $f'_1$ . Faire un schéma du dispositif. Quelle distance sépare les deux lentilles.
- 2) Les deux lentilles sont convergentes et  $f'_2=50\text{mm}$ . Reprendre les questions précédentes.

**Exercice 2 : Foyers d'un doublet**

Un doublet est formé d'une lentille convergente de distance focale 15cm et d'une lentille convergente de distance focale 10cm, les centres optiques des deux lentilles étant distants de 5cm. Déterminer les positions des foyers F et F' du doublet constitué.

**Exercice 3 : Focométrie**

La focométrie est la recherche de la distance focale d'un système optique.

1. Méthode d'autocollimation : on déplace un objet AB face à une lentille accolée ou non à un miroir plan jusqu'à ce que l'image A'B' de AB se forme dans le plan de l'objet. Montrer que cette méthode permet de déterminer la distance focale de la lentille : on tracera l'image de AB si A est en F. Peut-on directement utiliser cette méthode avec une lentille divergente ?
2. Méthode de BESSEL : un objet AB et un écran (E) sont maintenus fixes et distants de D. Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille convergente de distance focale image  $f'$  à déterminer. Montrer que si  $D > 4f'$  il existe deux positions de la lentille distantes de  $d$  pour lesquelles il y a une image nette de l'objet sur l'écran. Exprimer  $f'$  en fonction de  $d$  et D.
3. Méthode de BADAL : On utilise deux lentilles convergentes ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) distantes de  $\overline{O_1O_2} > f'_2$ . Faire une figure. Un objet ponctuel A est placé en  $F_1$  (par autocollimation) et a pour image A". Déterminer la position de A". On intercale une lentille divergente ( $L_3$ ) dont on veut mesurer la distance focale telle que  $O_3=F_2$  Faire une figure et déterminer une méthode de mesure de  $f'_3$ .

**Exercice 4 : Projecteur de diapositives**

On considère un projecteur de diapositives. La distance entre la diapositive et l'écran de projection est égale à 4,0m. La distance focale de la lentille de projection est de 70,0mm. On effectue la mise au point.

1. Estimer la valeur du grandissement.
2. Calculer la taille de l'image d'une diapositive de format 24x36mm.

**Exercice 5 : Téléobjectif d'un appareil photographique**

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente  $L_1$  de centre  $O_1$ , de distance focale image  $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 75\text{mm}$ . La pellicule P est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- une lentille  $L_2$  divergente, de centre  $O_2$  et de distance focale  $f'_2=25\text{mm}$ , que l'on accole à  $L_1$  ; on a ainsi  $O_2=O_1$ .
  - Une lentille  $L_3$  convergente, de centre  $O_3$  et de distance focale  $f'_3=100\text{mm}$ , que l'on fixe devant le système  $\{L_1-L_2\}$ . La distance  $O_3O_1$  est évidemment réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.
- 1) Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image  $F'$  de ce téléobjectif constitué par l'ensemble  $\{L_1-L_2-L_3\}$ .
  - 2) Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est à dire la distance du centre  $O_3$  de  $L_3$  à la pellicule P.
  - 3) Calculer la grandeur  $\overline{A'B'}$  de l'image d'une tour  $\overline{AB}$  de 60cm de hauteur, située à une distance  $d=3\text{ km}$  de l'objectif.
  - 4) Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion.

### Exercice 6 : Introduction au microscope

Un microscope simplifié est constitué de deux lentilles minces convergentes : une lentille d'entrée  $L_1$  (objectif) et une lentille  $L_2$  (oculaire). Leurs distances focales respectives sont  $f'_1=5\text{mm}$  et  $f'_2=20\text{mm}$ . La distance  $\Delta$  séparant le foyer image de  $L_1$  et le foyer objet de  $L_2$  est appelée intervalle optique.

On prendra ici  $\Delta = F'_1F_2 = 17\text{mm}$ .

Le microscope est réglé de manière à limiter la fatigue visuelle de l'utilisateur : l'image  $A'B'$  définitive se situe donc à l'infini. L'œil de l'observateur est proche du foyer image de l'oculaire.

- a) En utilisant les relations de conjugaison déterminer la position de l'objet à observer.
- b) Faire une construction géométrique soignée pour un objet  $AB$  perpendiculaire à l'axe optique et tracer la marche d'un faisceau lumineux issu de B.
- c) Calculer le grandissement de l'objectif.
- d) Exprimer l'angle  $\alpha'$  sous lequel est vue l'image définitive en fonction de  $\Delta, f'_1, f'_2$  et  $AB$ .
- e) L'observation à l'œil nu de l'objet à la distance minimale de vision nette  $d_m=25\text{cm}$  est faite sous

un angle  $\alpha$ . Déterminer le grossissement commercial  $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha}$  du microscope. En déduire la

puissance intrinsèque du microscope définie par le rapport  $G_c / d_m$

### Exercice 7 : Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est constituée d'une lentille convergente  $L_1$  de distance focale 50cm (objectif) et d'une lentille divergente  $L_2$  de distance focale -5cm (oculaire)

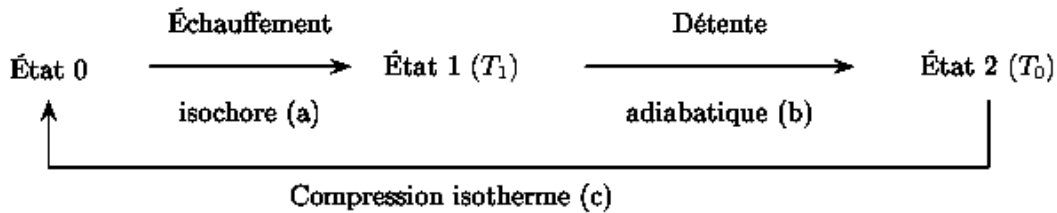
- a) Préciser la position relative des deux lentilles lorsque la lunette est réglée à l'infini.
- b) Calculer le grossissement angulaire de la lunette.
- c) De quelle distance doit-on translater l'oculaire pour voir, sans accommoder, un objet situé à 5 mètres en avant de l'objectif.

## Travaux dirigés de Thermodynamique n° 1

### Exercice 1 : Transformations d'un GPM

Un réservoir contient un volume  $V_0$  d'un gaz parfait monoatomique à une température  $T_0$  et une pression  $p_0$ .

On réalise la suite des transformations quasistatiques suivante :



1. Représenter le cycle réalisé dans le diagramme de Watt  $p(V)$ .
2. Préciser pour chaque transformation (a), (b), (c) le travail échangé, le transfert thermique et la variation d'énergie interne du gaz parfait en fonction des seules données  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  et  $T_1$ .

### Exercice 2 : Bilan d'énergie du Cycle de LENOIR

L'état initial d'une mole de gaz parfait est ( $p_0=2 \cdot 10^5 \text{Pa}$ ,  $V_0=14 \text{L}$ ). On lui fait subir successivement et de manière quasistatique :

- Une détente isobare qui double son volume,
  - Une compression isotherme qui le ramène à son volume initial,
  - Un refroidissement isochore qui le ramène à son état initial.
1. A quelle température  $T_1$ , la compression s'effectue-t-elle ? En déduire  $p_2$ , la valeur de la pression maximale atteinte.
  2. Représenter le cycle décrit par ce gaz dans le diagramme de Watt ( $p, V$ ).
  3. Calculer le travail et le transfert thermique échangé par le système au cours du cycle.

On donne  $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Exercice 3 : Compression isotherme puis monotherme – D'après ENSAM

Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre de volume  $V_1=5 \text{L}$  à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable. A l'extérieur du piston, la température est  $T_{ext}=293 \text{K}$ , la pression est  $P_{ext}=1 \text{atm}$ . La paroi du cylindre étant parfaitement diatherme, à l'équilibre, la température du gaz est toujours  $T_{ext}=293 \text{K}$ . Au départ, la pression du gaz est  $p=P_1=P_{ext}$ .

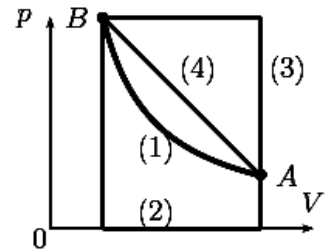
1. En appuyant sur le piston, on augmente très légèrement la pression jusqu'à  $P_2=10 \text{atm}$ . Calculer  $T_2$ ,  $V_2$ ,  $\Delta U$  et  $Q$ .
2. On passe maintenant instantanément de  $P_1$  à  $P_2$  puis on attend l'équilibre qui interviendra forcément après quelques oscillations du piston si on considère la viscosité du gaz. Calculer  $T'_2$ ,  $V'_2$ ,  $\Delta'U$  et  $Q'$ .

On rappelle :  $1 \text{atm}=1,013 \cdot 10^5 \text{Pa}$ .

**Exercice 4 : Travail et transfert thermique échangés entre deux états d'un gaz parfait.**

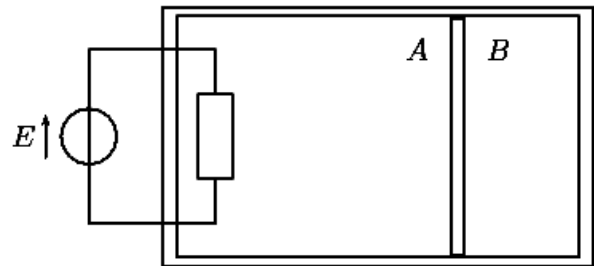
On considère  $n$  moles de dioxygène (supposé gaz parfait) que l'on peut faire passer de l'état  $A(p_A, V_A, T_A)$  à l'état  $B(p_B=3p_A, V_B, T_A)$  suivant quatre chemins distincts de manière quasistatique.

Calculer les travaux et transferts thermiques échangés au cours de ces quatre transformations en fonction de  $R$  et  $T_A$ .



**Exercice 5 : Système thermodynamique plus complexe.**

On considère un cylindre rigide aux parois adiabatiques séparé en deux compartiments A et B par un piston adiabatique mobile sans frottement. Ces deux compartiments contiennent le même gaz parfait dont on connaît l'exposant adiabatique  $\gamma$  supposé constant. Un conducteur ohmique de résistance  $R$  et de capacité thermique négligeable est placé dans A.



L'état initial correspond à  $V_{A0}=V_{B0}=V_0, p_{A0}=p_{B0}=p_0, T_{A0}=T_{B0}=T_0$ . On fait passer un courant  $I$  dans  $R$  sous une tension  $E$  pendant un temps  $\tau$ . Le gaz A passe alors lentement de  $V_{A0}$  à  $V_A=2V_{B0}$ .

1. Caractériser les transformations qui affectent les gaz A,B, {A+B} puis les systèmes {R+A} et {A+B+R}.
2. Quels sont les paramètres d'état des gaz dans l'état final.
3. Quels sont les échanges d'énergie entre A et B ?
4. Quels sont les échanges d'énergie entre le résistor et A ?

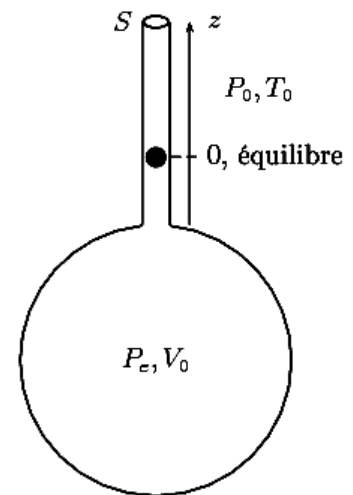
**Exercice 6 : Mesure expérimentale de  $\gamma$ . Expérience de Rüchardt.**

On considère un récipient fermé par un piston de masse  $m$ , mobile sans frottement dans le col cylindrique vertical de section  $S$ .

Le récipient contient  $n$  moles d'un gaz parfait dont on cherche à déterminer l'exposant adiabatique  $\gamma$  constant.

A l'extérieur, l'air est à la pression  $P_0=Cte$  et à l'équilibre, le volume intérieur du récipient est  $V_0$ .

1. Déterminer  $P_e$ , la valeur de la pression à l'intérieur du récipient quand le piston est à l'équilibre.
2. Le piston est déplacé de sa position d'équilibre, on notera  $P=P_e+dP$  la pression dans le récipient à un instant quelconque avec  $dP \ll P_e$  et toutes les transformations seront considérées comme adiabatiques et quasistatiques.
  - a. Exprimer  $dP$  en fonction de  $dV$  puis de  $z$ , la position du piston par rapport à sa position d'équilibre.  $V \approx V_0$ .
  - b. En utilisant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton), en déduire l'équation du mouvement du piston et la mettre sous la forme  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ .
  - c. En déduire une méthode pratique de mesure de  $\gamma$ .



### Exercice 7 : Chauffage d'un local

Un local est chauffé à l'aide d'un radiateur électrique d'une puissance  $P_{rad}=1,4\text{kW}$ .

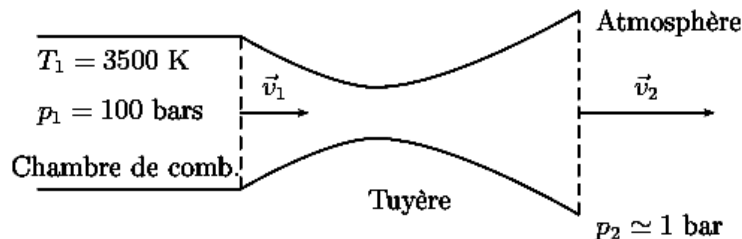
La pression atmosphérique est constante et la température extérieure est  $T_{ext}=285\text{K}$  ( $12^\circ\text{C}$ ).

Le local a une capacité thermique  $C_p$  indépendante de la température.

Il existe des fuites thermiques. La puissance dissipée dans ces fuites est proportionnelle à l'écart entre la température  $T$  de la pièce et la température extérieure :  $P_{fuite} = \frac{\delta Q_{fuite}}{dt} = \frac{T - T_{ext}}{R_{th}}$  où  $R_{th}$  est la résistance thermique des parois.

1. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $T(t)$  quand le chauffage du local n'est pas actif. Donner la solution littérale de cette équation pour une température initiale  $T_1 > T_{ext}$ . Quelle est, sans chauffage, la valeur limite de la température de la pièce ?
2. Montrer que la température de la pièce tend vers une limite  $T_{lim}$  quand le chauffage est en fonctionnement permanent.
3. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $T(t)$  quand le chauffage est actif pour une température initiale  $T_0 > T_{ext}$ .
4. Représenter graphiquement l'allure des variations de température au cours d'un cycle de chauffage si le radiateur se déclenche dès que  $T \leq T_0$  avec  $T(t)$  décroissante et s'arrête dès que  $T \geq T_1$  avec  $T(t)$  croissante.

### Exercice 8 : Détente dans une tuyère.



Une tuyère est une tuyauterie rigide variable qui conduit des gaz comprimés et chauds à se détendre.

Les gaz sont issus de la chambre de combustion d'une fusée par exemple.

Si on suppose que le propergol utilisé est composé de  $\text{O}_2$  et  $\text{H}_2$ , les gaz brûlés sont de la vapeur d'eau (considérée comme gaz parfait) de masse molaire  $M$  et d'exposant adiabatique  $\gamma = 1,30$ .

La détente étant très rapide, on peut la considérer comme adiabatique.

1. Déterminer la relation liant les enthalpies massiques du gaz avant et après la détente  $h_1$  et  $h_2$  aux vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .
2. On considère  $v_1 \ll v_2$  et la transformation réversible. On note  $C_p$  la capacité thermique à pression constante du gaz. En déduire l'expression de  $v_2$  en fonction de  $\gamma$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $T_1$ ,  $p_1$  et  $p_2$  et faire l'application numérique.

## Travaux dirigés de Thermodynamique n°2

### Exercice 1 : Variation d'entropie au cours de N transformations réversibles.

Soit une mole de gaz parfait monoatomique à la pression  $p=1\text{bar}$  et à température  $T_0=450\text{K}$  (état 0). On comprime ce gaz de la pression  $p$  à  $p'=10\text{bars}$  de façon réversible et isotherme, puis, on détend le gaz de façon réversible de  $p'$  à  $p$  (état 1).

1. Représenter la suite des transformations dans un diagramme de Watt ( $p,V$ )
2. Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_I$  du gaz ainsi que la température finale  $T_I$ .
3. On recommence la même opération depuis l'état 1 ( $p,T_I$ )  $\rightarrow$  état 2 ( $p,T_2$ )  $\rightarrow$  ...  $\rightarrow$  état N ( $p,T_N$ ). Compléter le diagramme de Watt et déterminer la variation d'entropie du gaz après les N opérations ainsi que la température finale  $T_N$  et enfin la variation d'énergie interne  $\Delta U_N$ . Faire les applications numériques pour  $N+5$ .
4. Voyez-vous une application ? Discutez l'hypothèse du gaz parfait si N grand.

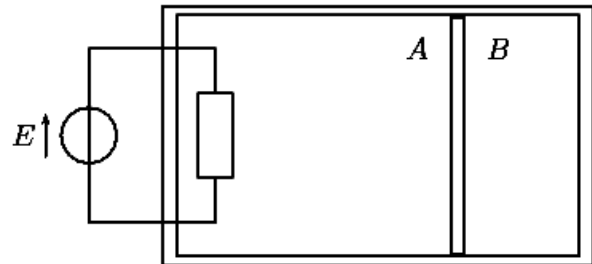
### Exercice 2 : Système thermodynamique plus complexe

Un récipient à parois rigides et calorifugées contient deux gaz parfaits diatomiques séparés par une paroi adiabatique qui peut se déplacer sans frottement (fig ci-dessous) et un conducteur ohmique de résistance  $R=10\Omega$  et de capacité thermique négligeable parcourue par un courant d'intensité  $I=5\text{A}$  pendant une durée  $\tau$ .

Initialement,  $V_{A0}=V_{B0}=V_0=1\text{L}$ ,  $p_A=1\text{bar}$  et  $T_A=T_B=300\text{K}$ .

Après le temps  $t$ ,  $V'_A=1,1\text{L}$ .

1. Calculer  $p'_B$ ,  $p'_A$ ,  $T'_B$  et  $T'_A$ .
2. Calculer  $\tau$ .
3. Calculer  $W_B$ , le travail reçu par le gaz B.
4. Calculer  $\Delta S_A$  la variation d'entropie du gaz A.

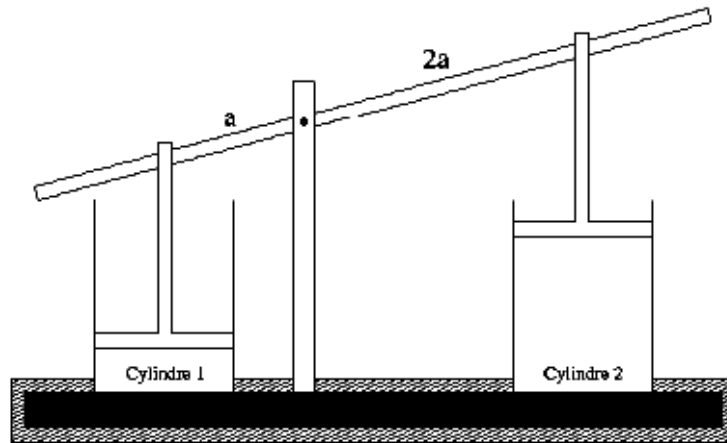


### Exercice 3 : De l'irréversible au réversible.

1. Un bloc de cuivre de masse  $m$ , de capacité calorifique massique  $c$  et à température  $T_0$  est plongé dans un lac à la température  $T_f$ .
  - a. Quel est l'état final du bloc de cuivre (température et volume) ?
  - b. Calculer la variation d'entropie du bloc de cuivre puis celle du lac et enfin celle de l'ensemble :  $S_c$ . Préciser le signe de chacune de ces variations d'entropie en fonction de  $x=T_0/T_f$ .
2. Au lieu de faire passer directement le bloc de cuivre dans le lac à la température  $T_f$ , on le plonge d'abord dans un thermostat à température intermédiaire  $T_i$ . Calculer la variation d'entropie du bloc de cuivre puis la variation d'entropie totale du cuivre et des sources (entropie créée).
3. En réalité, on plonge le bloc de cuivre successivement dans N sources dont les températures  $T_i$  s'échelonnent régulièrement de  $T_0$  à  $T_f$  ( $i=1,2,\dots$ ). Calculer la variation d'entropie du bloc de cuivre entre l'état initial et l'état final, ainsi que la variation d'entropie totale du cuivre et des sources.
4. Etudier la limite quand N tend vers  $+\infty$ . Interpréter.

### Exercice 4: Illustration du principe d'entropie maximale

Deux cylindres de même section  $S$ , contenant deux gaz qui peuvent être différents, sont fermés par deux pistons étanches.



Ces deux pistons sont solidaires en ce sens que leurs axes restent verticaux et sont attachés aux bras d'un levier dont le point fixe est deux fois plus près du premier cylindre que du second, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Les deux cylindres reposent sur une table métallique qui a pour seul effet de permettre les transferts thermiques entre les deux systèmes, c'est-à-dire entre les gaz contenus dans les deux cylindres.

Le système complet formé par ces deux cylindres est isolé et n'est pas soumis à une pression extérieure.

1. Déterminer la relation imposée par la présence du levier sur les variations de volume  $dV_1$  et  $dV_2$  des deux cylindres.
2. Ecrire l'expression de la variation infinitésimale d'entropie  $dS$  du système complet formé par les deux cylindres en fonction des températures  $T_1$  et  $T_2$  des gaz contenus dans les deux cylindres, des pressions  $p_1$  et  $p_2$  qui règnent dans les deux cylindres et des seules variations  $dV_1$  (variation de volume du gaz contenu dans le cylindre 1) et  $\Delta U_1$  (variation de l'énergie interne du gaz contenu dans le cylindre 1). Les capacités thermiques des cylindres et de la table sont négligeables.
3. Que vaut  $dS$  lorsque le système complet est à l'équilibre ? En déduire la relation entre les températures  $T_1$  et  $T_2$ , puis celle entre les pressions  $p_1$  et  $p_2$  des gaz dans les cylindres 1 et 2 lorsque l'équilibre est atteint.



## Travaux dirigés de Thermodynamique n°3

### Exercice 1 : Moteur de Carnot réversible utilisant un gaz parfait.

De l'air assimilé à un gaz parfait, de coefficient isentropique  $\gamma = 1,40$  décrit un cycle de Carnot ABCD :

- les transformations AB et CD sont adiabatiques et réversibles ;
- les transformations BC et DA sont isothermes et réversibles.

On donne  $T_B=1431\text{K}$  ;  $P_D=1,0\text{bar}$  ;  $T_D=323\text{K}$  ;  $V_D=2,40\text{L}$  et le transfert thermique  $Q_{BC}=1,24\text{kJ}$  reçu par l'air au cours de la transformation BC.

1. Calculer la quantité de matière d'air, les volumes  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$  et les pressions  $p_A$ ,  $p_B$  et  $p_C$  et tracer l'allure du cycle ABCD dans le diagramme de Clapeyron.
2. Calculer les travaux et les transferts thermiques reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC, CD et DA.
3. Calculer le travail  $W$  récupéré et le rendement  $\eta$  du moteur.
4. En utilisant le premier et le second principe, montrer que le rendement  $\eta$  ne dépend que de  $T_B$  et  $T_D$ .
5. Que devient le rendement si l'on a un cycle irréversible (théorème de Carnot) ?

### Exercice 2 : Machine frigorifique

Un réfrigérateur est constitué essentiellement d'un fluide soumis à une série de cycles thermodynamiques. A chaque cycle, le fluide extrait de l'intérieur de l'enceinte un transfert thermique  $Q_2$  et échange avec l'extérieur un transfert thermique  $Q_1$  et un travail  $W$ .

On admettra que l'intérieur du réfrigérateur et l'extérieur constituent deux thermostats aux températures respectives  $T_2=268\text{K}$  et  $T_1=293\text{K}$ , et qu'en dehors des échanges avec ces thermostats, les transformations sont adiabatiques.

1. Quels sont les signes de  $Q_1$ ,  $W$  et  $Q_2$  ?
2. Définir et calculer l'efficacité théorique maximale  $e$  de cette machine. Pour quel type de cycle ce rapport est-il maximal ? Calculer cette valeur maximale.
3. Peut-on refroidir, à long terme, une cuisine en laissant la porte du réfrigérateur ouverte ?

### Exercice 3 : Cycle de Diesel.

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes :

Etat (1)  $\rightarrow$  Etat (2) : compression adiabatique

Etat (2)  $\rightarrow$  Etat (3) : dilatation à pression constante

Etat (3)  $\rightarrow$  Etat (4) : détente adiabatique

Etat (4)  $\rightarrow$  Etat (1) : refroidissement à volume constant.

Chaque état est défini par la pression  $P_i$ , la température  $T_i$  et le volume  $V_i$  (i variant de 1 à 4). On appelle  $\gamma$

le rapport des capacités calorifiques molaires  $\frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ . On définit  $x = \frac{V_1}{V_2}$  le taux de compression et  $z = \frac{V_1}{V_3}$  le taux de détente.

1. Représenter sommairement le cycle sur un diagramme de Watt puis un diagramme entropique.
2. Exprimer le rendement  $\eta$  de ce moteur en fonction :
  - a. Des travaux et transferts thermiques,
  - b. Des températures  $T_i$  et de  $\gamma$ ,
  - c. De  $x$ ,  $z$  et  $\gamma$ . On exprimera  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  en fonction de  $T_1$ ,  $x$ ,  $\gamma$  et  $z$ .
3. Faire l'application numérique pour  $x=21$ ,  $z=7$ ,  $\gamma=1,4$  et commentez.

#### Exercice 4: Fonctionnement d'un moteur entre deux masses d'eau

Un moteur thermique réversible fonctionne entre :

- une masse d'eau  $m_c=500\text{kg}$ , source chaude à la température initiale  $T_{c,0}=360\text{K}$  ;
  - une masse d'eau  $m_f=800\text{kg}$ , source froide à la température initiale  $T_{f,0}=288\text{K}$ .
1. Calculer la température finale  $T$  atteinte lorsque le moteur cesse de fonctionner.
  2. Déterminer pendant la durée du fonctionnement du moteur :
    - a. Le transfert thermique  $Q_c$  reçu de la part de la source chaude ;
    - b. Le transfert thermique  $Q_f$  reçu de la part de la source froide ;
    - c. Le travail algébrique  $W$  reçu par le moteur

Donnée : la capacité thermique massique de l'eau  $c_{\text{eau}}=4185\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

#### Exercice 5 : Cycle réversible et cycle irréversible.

Dans une machine frigorifique dont le fluide est assimilable à un gaz parfait, une mole de fluide parcourant le cycle reçoit un transfert thermique  $Q_2 (>0)$  d'une source froide de température  $T_2=268\text{K}$ , et un transfert thermique  $Q_1 (<0)$  d'une source chaude de température  $T_1=293\text{K}$ .

Le compresseur délivre dans le même temps un travail  $W$

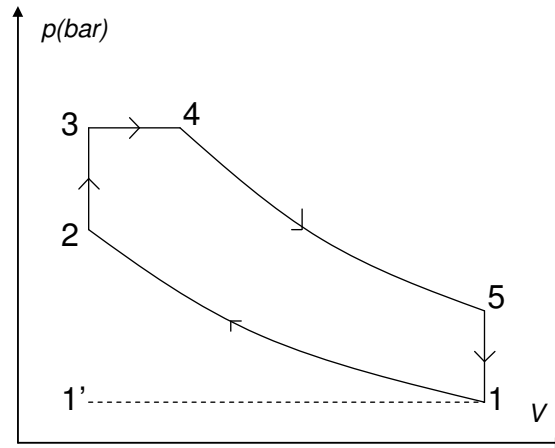
1. On suppose, dans un premier temps, que le cycle comprend les transformations réversibles suivantes :
  - une compression adiabatique de  $T_2$  à  $T_1$
  - une compression isotherme à  $T_1$
  - une détente adiabatique de  $T_1$  à  $T_2$
  - une détente isotherme à  $T_2$ 
    - a. Exprimer  $W$  en fonction de  $Q_1$  et des températures. Pourquoi est-il impossible d'abaisser la température de la source froide au zéro absolu ?
    - b. Définir et calculer l'efficacité  $e$  du cycle.
2. En réalité le cycle comprend les transformations suivantes :
  - une compression adiabatique réversible de  $T_2$  à  $T'_2=330\text{K}$  ;
  - un refroidissement isobare de  $T'_2$  à  $T_1$  ;
  - une détente adiabatique réversible de  $T_1$  à  $T'_1$  ;
  - un échauffement isobare jusqu'à  $T_2$ .

Exprimer l'efficacité  $e$  en fonction de  $T_2$  et  $T'_2$  et comparer sa valeur à celle du cycle réversible.

Donnée : capacité molaire à pression constante du fluide  $C_{pm}=29\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

### Exercice 6 : Cycle d'un moteur Diesel à double combustion.

Dans les moteurs Diesel actuels, à vitesse de rotation élevée, le cycle décrit par l'air est celui représenté sur la figure ci-dessous dans le diagramme de Clapeyron :



Après la phase d'admission de 1' à 1, l'air subit une compression isentropique de 1 à 2.

Après l'injection de carburant en 2, la combustion s'effectue d'abord de façon isochore de 2 à 3 puis se poursuit de façon isobare de 3 à 4.

La phase de combustion est suivie d'une détente isentropique de 4 à 5 puis d'une phase d'échappement isochore de 5 à 1 et de refoulement isobare de 1 à 1'.

La pression en 1 est 1 bar et la température est 293K. La pression maximale est 65 bar et la température maximale (en 4) est 2173K.

On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique et on appelle  $\alpha_v$  le rapport volumétrique de compression  $\alpha_v = \frac{V_1}{V_2} = 19$ .

1. Exprimer en fonction de  $\gamma$  et des différentes températures le rendement de ce moteur Diesel.
2. Calculer les températures  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_5$ . En déduire la valeur numérique du rendement.
3. Déterminer le transfert thermique  $Q_c$  reçu par une masse d'air d'un kilogramme lors de la combustion de 2 à 4.
4. Déterminer le transfert thermique  $Q_f$  reçu par une masse d'air d'un kilogramme lors de l'évolution de 5 à 1.
5. Déterminer le travail  $W$  reçu par une masse d'air d'un kilogramme au cours du cycle.

Donnée : masse molaire de l'air  $M=29\text{g.mol}^{-1}$ .

**Travaux dirigés de Thermodynamique n°4**
**Exercice 1 : Détente réversible d'un gaz parfait au contact d'un mélange eau+glace.**

Un cylindre à parois diathermes, fermé par un piston, contient une mole de gaz parfait dans l'état initial ( $T_1=273\text{K}$ ,  $p_1=3\text{bars}$ ). Ce système est plongé dans un bain eau+glace constituant un thermostat à  $0^\circ\text{C}$ . On agit sur le piston mobile pour détendre, de façon réversible le gaz jusqu'à la pression  $p_2=1\text{bar}$ .

1. Déterminer la masse  $m$  de glace apparaissant dans le thermostat, l'enthalpie massique de fusion de la glace étant  $L_f=334\text{J.g}^{-1}$ .
2. Calculer la variation d'entropie du gaz et celle du thermostat.

**Exercice 2 : Equilibre liquide-vapeur**

On cherche à obtenir du diazote liquide à la température de  $T'=78\text{K}$  pour laquelle la pression de vapeur saturante vaut  $p'=1\text{bar}$ .

On peut réaliser cela en faisant une détente adiabatique et réversible de l'état (vapeur saturante,  $p < p_c$  pression du point critique,  $T=160\text{K}$ ,  $s=1,76\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) à l'état ( $p', T', s'$ ).

On sépare ensuite le liquide de la vapeur.

On donne les entropies massiques du diazote liquide et gazeux à la température  $T'=78\text{K}$  :

$s'_l=0,44\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $s'_v=2,96\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

1. Représenter la transformation dans le diagramme entropique  $T(s)$  en faisant figurer la courbe de saturation et les isobares  $p$  et  $p'$ .
2. Déterminer le titre en vapeur du mélange obtenu et la masse de diazote liquide obtenue par kilogramme de diazote traversant le compresseur.

**Exercice 3 : Variation d'entropie lors d'un mélange eau liquide-glace.**

Dans un récipient parfaitement calorifugé, on place une masse  $M$  d'eau à  $q_1=20^\circ\text{C}$  et une masse  $m=500\text{g}$  de glace à  $0^\circ\text{C}$ .

1. Déterminer la composition et la température du mélange à l'équilibre si  $M=1\text{kg}$ .
2. Déterminer la composition et la température du mélange à l'équilibre si  $M=4\text{kg}$ .
3. Dans le cas où  $M=1\text{kg}$ , déterminer la variation d'entropie de la masse d'eau
  - a. Initialement à l'état liquide.
  - b. Initialement à l'état solide.

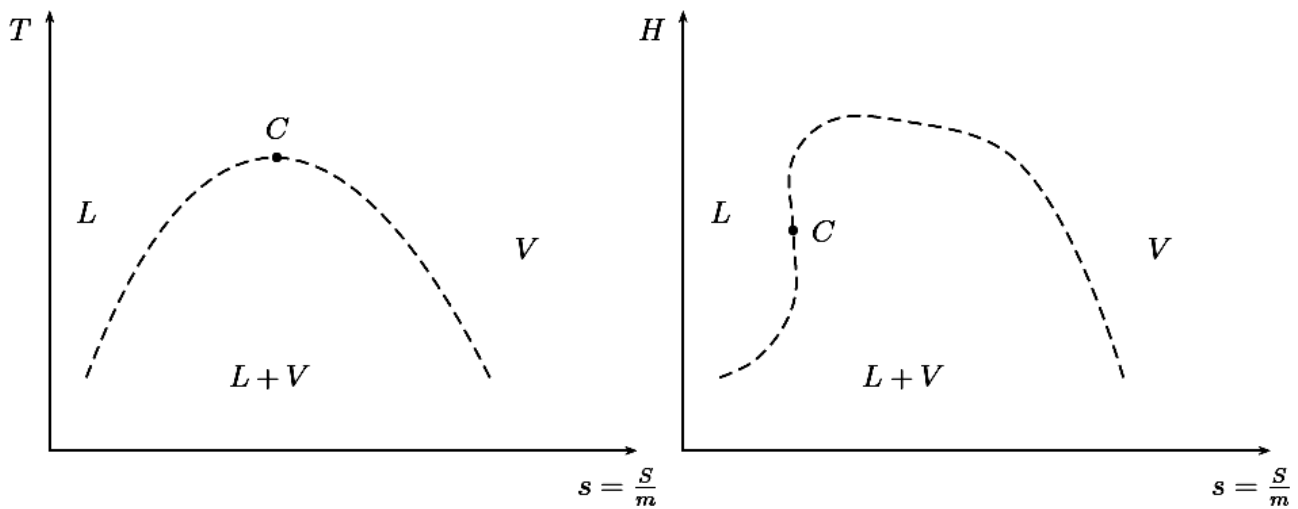
La transformation est-elle réversible ?

Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_e=4,2\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ; de l'eau solide  $c_g=2,1\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$   
 chaleur latente de fusion de la glace  $L=336\text{kJ.kg}^{-1}$ .

**Exercice 4: Machine à vapeur : cycle de Rankine en diagrammes de Clapeyron, entropique et enthalpique (Mollier)**

Dans une machine à vapeur, l'eau décrit un cycle de Rankine :

- AB : l'eau liquide ( $P_1, T_1$ ) à saturation est comprimée de façon isentropique dans une pompe jusqu'à la pression  $P_2$  de la chaudière. Cette transformation se fait pratiquement sans variation de volume. On raisonne sur l'unité de masse.
  - BD et DE : l'eau liquide est injectée dans la chaudière, s'y réchauffe jusqu'à  $T_2$  (BD) et s'y vaporise (DE) à la pression  $P_2$ . En E, le fluide est à l'état de vapeur saturante.
  - EF : la vapeur est admise dans le cylindre à  $T_2, P_2$  et on effectue une détente isentropique jusqu'à la température initiale  $T_1$  : on observe un mélange liquide-vapeur de titre massique en vapeur  $x$ .
  - FA le piston par son retour chasse le mélange dans le condenseur où il se liquéfie totalement.
1. Donner l'allure du cycle en coordonnées  $(P,v)$  en faisant figurer les deux isothermes  $T_1$  et  $T_2$ . On justifiera que la température de B est très voisine de celle de A.
  2. Exprimer le rendement de ce moteur thermique uniquement en termes d'enthalpie  $\eta = f(H_A, H_B, H_D, H_E, H_F)$ .
  3. Donner l'allure du cycle en diagramme entropique  $(T,s)$  puis en diagramme enthalpique (dit de Mollier)  $(H,s)$ . On donne l'allure de la courbe de saturation dans ces diagrammes.



4. En thermodynamique industrielle, le diagramme de Mollier, bâti à partir de données expérimentales, permet la lecture directe des enthalpies massiques et entropiques. On donne :

P (bar)	t (°C)	Liquide		Vapeur	
		$s_L$ (kJ.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )	$h_L$ (kJ.kg <sup>-1</sup> )	$s_V$ (kJ.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )	$h_V$ (kJ.kg <sup>-1</sup> )
$P_1 = 0,2$	$t_1 = 60$	0,83	251	7,9	2 608
$P_2 = 12$	$t_2 = 188$	2,2	798	6,52	2 783

Calculer le rendement du cycle (on confondra  $H_A$  et  $H_B$ ).

### Exercice 5 : Etude d'un climatiseur réversible.

On s'intéresse au fonctionnement d'un appareil de climatisation, dont le but est de maintenir une température constante ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ) dans un local été comme hiver.

Le climatiseur fonctionne en pompe à chaleur l'hiver, en machine frigorifique l'été. Les échanges thermiques du climatiseur se font avec deux sources :

- L'intérieur de la pièce (à  $T_0$ ).
- L'atmosphère extérieure (on prendra  $T_1=0^\circ\text{C}$  en hiver ;  $T_2=40^\circ\text{C}$  en été afin de prévoir des conditions "extrêmes").

Le fluide caloporteur qui effectue des cycles dans l'appareil est l'ammoniac. Ses caractéristiques thermodynamiques sont résumées dans le diagramme entropique T(S) où sont représentées :

- Les isenthalpiques (H est donné en kJ/kg) ;
- Les isobares représentées en pointillées dans le domaine "vapeur sèche".

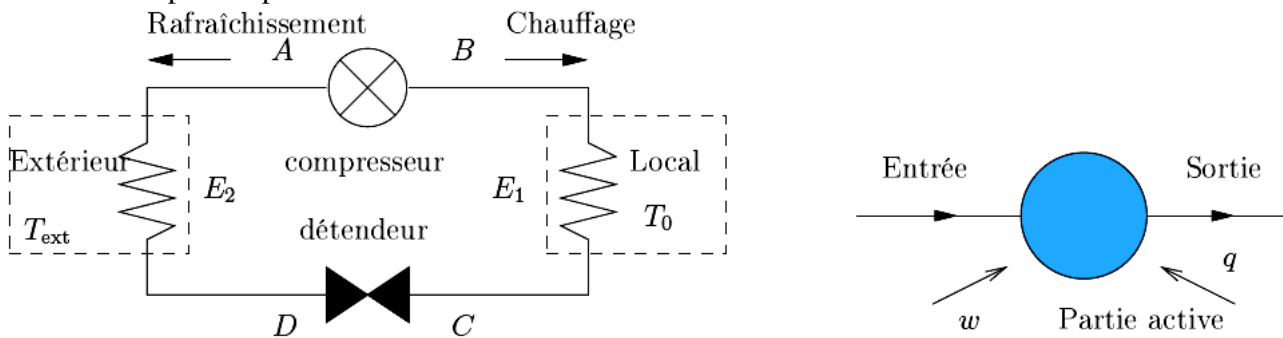
On donne, par ailleurs, les pressions de vapeur saturante  $P_s(T)$  aux trois températures d'étude :

$P_s(0^\circ\text{C})=4,3\text{bar}$  ;  $P_s(20^\circ\text{C})=8,2\text{bar}$  ;  $P_s(40^\circ\text{C})=15\text{bar}$ .

On se limitera à l'étude du climatiseur en régime permanent.

Par un jeu de vannes adéquat, le fluide peut circuler dans un sens pour chauffer la pièce (A,B,C,D,A) ; dans l'autre pour la rafraîchir (B,A,D,C,B).

Le circuit comporte 2 parties isobares :



- L'une à la pression de vapeur saturante de l'ammoniac à  $20^\circ\text{C}$  (coté local) ;
- L'autre à la pression de vapeur saturante de l'ammoniac à  $T_{\text{ext}}$  (coté atmosphère extérieure).

Par ailleurs, on rappelle qu'à la traversée d'une partie active (compresseur, détendeur ou échangeur) l'énergie reçue par le fluide circulant en régime permanent vérifie

$$\Delta h = h_s - h_e = w + q$$

où  $h_e$  et  $h_s$  sont les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie ;  $w$  et  $q$  étant le travail et le transfert thermique utiles reçus (c'est à dire échangés avec l'extérieur du circuit, excluant le travail des forces de pression) par kilogramme de fluide traversant la partie active.

Le fluide subit des transferts thermiques isobares (sans recevoir de travail utile) dans les échangeurs  $E_1$  et  $E_2$  avec les deux thermostats (local et atmosphère extérieure). Un système de ventilation permet d'améliorer les échanges thermiques : la température du fluide est celle de la source d'échange à la sortie de chacun d'entre eux.

Le compresseur comprime de manière adiabatique et réversible le fluide à l'état gazeux de la plus faible à la plus forte pression.

L'unité de masse du fluide traité y reçoit le travail utile  $w$ .

Le fluide subit une détente adiabatique, sans échange de travail utile, dans le détendeur (la détente est donc isenthalpique).

**1. Généralités :**

- a. Comment réalise-t-on un détendeur (détente isenthalpique d'un fluide) ? Quelle autre nom porte une telle détente ?
- b. Le premier principe de la thermodynamique est bien vérifié dans une partie active ; c'est pourtant  $\Delta h$  (et non  $\Delta u$ ) qui est égal à  $w+q$ . Expliquer qualitativement (sans entrer dans le détail d'une démonstration) cette différence.
- c. En supposant que l'ammoniac, à l'état gazeux, est assimilable à un gaz parfait de coefficient adiabatique  $\gamma$  constant, exprimer le rapport  $T_s/T_e$  (des températures absolues de sortie et d'entrée dans le compresseur) en fonction de  $\gamma$  et  $P_s/P_e$  (rapport des pressions de sortie et d'entrée du compresseur).
- d. Par lecture du graphe, déduire les enthalpies massiques de vaporisation de l'ammoniac à  $0^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$  et  $40^\circ\text{C}$ .

**2. Fonctionnement hivernal du climatiseur (chauffage) :**

Dans ce cas :

- L'échangeur  $E_1$  est un condenseur : l'ammoniac y entre en B sous forme de vapeur sèche et il en ressort sous forme de liquide saturant en C, à la température  $T_0$  du local ;
  - L'échangeur  $E_2$  est un évaporateur : le mélange liquide vapeur qui entre en D se vaporise totalement pour ressortir sous forme de vapeur saturante en A à la température de l'atmosphère extérieure  $T_f=0^\circ\text{C}$ .
- a. Tracer le cycle (en l'orientant) de l'ammoniac sur le diagramme entropique. Trouver graphiquement sa température  $T_B$  à la sortie du compresseur.
  - b. Déterminer (graphiquement), pour un kg d'ammoniac traité (on rappelle que  $E_1$ ,  $E_2$  et le compresseur sont des parties actives) :
    - i. Le travail  $w$  fourni par le compresseur au fluide ;
    - ii. Le transfert thermique  $q_c$  reçu par le fluide (de la part du local) lors du passage dans l'échangeur  $E_1$  ;
    - iii. Le transfert thermique  $q_f$  reçu par le fluide (de la part de l'extérieur) lors du passage dans l'échangeur  $E_2$ .

Faire un bilan énergétique du cycle.
  - c. Définir et calculer le coefficient de performance  $\eta$  du climatiseur. Quel intérêt présente une telle installation par rapport à un chauffage par chaudière ? Quel serait le coefficient si le fluide effectuait des cycles de Carnot en effectuant les échanges thermiques avec les mêmes thermostat ? En quoi le cycle effectué diffère-t-il du cycle de Carnot ?
  - d. Quelle est la fraction massique de vapeur  $X_D$  à la sortie du détendeur ?
  - e. En utilisant le résultat de la question 1.C., évaluer l'indice adiabatique  $\gamma$  du gaz ammoniac.

**3. Fonctionnement estival du climatiseur (rafraîchissement) :**

Les rôles des deux échangeurs sont inversés :  $E_1$  est un évaporateur ;  $E_2$  est un condenseur.

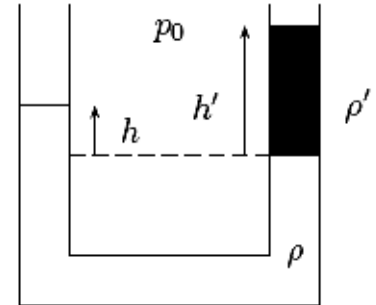
- a. Tracer le cycle (en l'orientant) de l'ammoniac sur le diagramme entropique (on affectera les points de l'indice '). Trouver graphiquement sa température  $T'_A$  à la sortie du compresseur.
- b. Déterminer (graphiquement), pour un kg d'ammoniac traité (même remarque qu'en 2.b) :
  - i. Le travail  $w'$  fourni par le compresseur au fluide ;
  - ii. Le transfert thermique  $q'_1$  reçu par le fluide (de la part du local) lors du passage dans l'échangeur  $E_1$  ;
  - iii. Le transfert thermique  $q'_2$  reçu par le fluide (de la part de l'extérieur) lors du passage dans l'échangeur  $E_2$ .
- c. Définir et calculer le nouveau coefficient de performance  $\eta_\vartheta$  du climatiseur.

**Travaux dirigés de Thermodynamique n°5**
**Exercice 1 : Liquides non miscibles dans un tube en U.**

On verse de l'eau de masse volumique  $\rho$ , dans un tube en U se section 1 cm<sup>2</sup>.

On ajoute ensuite dans le branche de droite, 3mL d'une liquide non miscible de masse volumique  $\rho' = 600 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Déterminer la différence de hauteur entre les deux surfaces libres des deux branches.


**Exercice 2 : Statique des fluides en référentiel non galiléen**

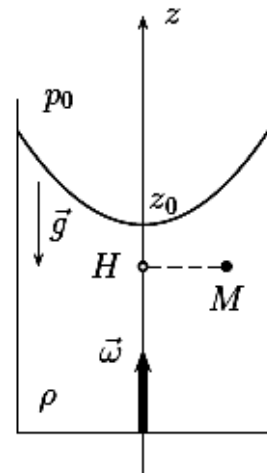
1. Retrouver l'expression de la relation de la statique des fluides dans le cas où le référentiel d'étude est galiléen. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme  $dp = \rho \vec{g} \cdot d\vec{r}$ . Généraliser dans le cas où le référentiel est non galiléen en utilisant la notion de pesanteur apparente  $\vec{g}_a$ .
2. Un aquarium subit une accélération d'entraînement  $\vec{a}_e = a_e \vec{u}_x$  par rapport au référentiel galiléen. Quelle est la forme de la surface de séparation air/eau ?
3. Montrer qu'il est possible de connaître l'accélération  $\vec{a}$  d'un véhicule à partir de la différence des niveaux d'un liquide dans les branches d'un tube en U. La distance des branches du tube est d.

Application numérique :  $\frac{h}{d} = 0,57$ .

**Exercice 3 : Statique des fluides en référentiel non galiléen**

On fait tourner un récipient contenant de l'eau autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante par rapport au référentiel terrestre R.

1. On se place dans le référentiel tournant R'. Quelles sont les forces appliquées à une particule fluide immobile dans R', centrée autour de M et de volume dV ? Montrer que le champ de pesanteur  $\vec{g}$  peut être remplacé par un champ apparent  $\vec{g}_a$  qu'on exprimera en fonction de  $\vec{g}$  et du vecteur  $\vec{r} = \overline{HM}$ , H étant la projection de M sur l'axe de rotation.
2. Quelle est la forme de la surface libre air/eau ? On admettra que la relation de la statique des fluides prend la forme  $dp = \rho \vec{g} \cdot d\vec{r}$  où  $d\vec{r}$  est un déplacement élémentaire.
3. Citer une application en instrumentation optique qui s'appuie sur le résultat précédent.



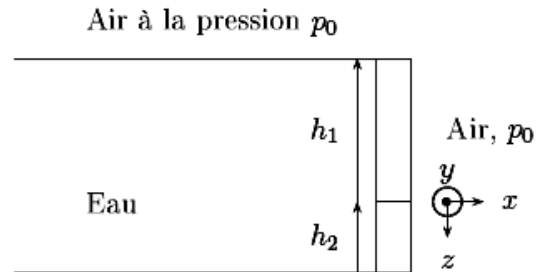


**Exercice 4 : Barrage plan.**

Le mur plan vertical de la figure est constitué de deux pavés, de même épaisseur et de même largeur  $a$  (selon  $Oy$ ) et de hauteurs respectives  $h_1$  et  $h_2$ . Le réservoir situé à sa gauche est rempli d'eau de masse volumique  $\rho$  alors que de l'autre coté des pavés et au dessus de la surface, l'air impose une pression  $p_0$  uniforme.

On veut choisir le rapport  $\frac{h_2}{h_1}$  pour que les résultantes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  des forces de pression subies par les deux pavés soient identiques.

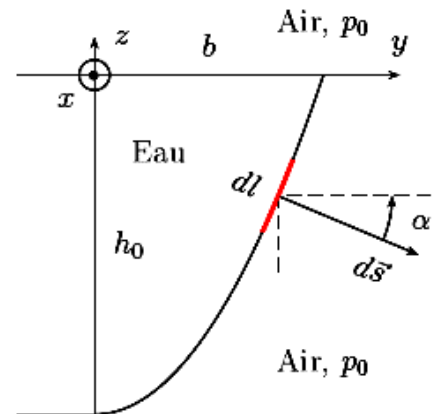
1. Prévoir, sans calcul, si on doit prendre  $h_1 > h_2$  ou  $h_1 < h_2$ .
2. Calculer le rapport  $\frac{h_2}{h_1}$  convenable.



**Exercice 5 : Barrage à profil parabolique.**

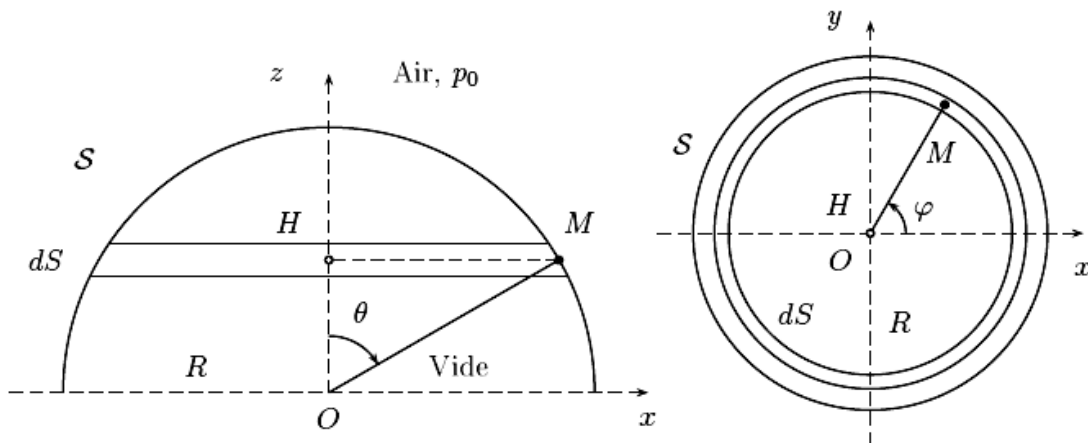
Un barrage de largeur  $a=15m$ , (selon  $Ox$ ) a un profil parabolique d'équation  $z = h_0 \left[ \frac{y^2}{b^2} - 1 \right]$  où  $h_0=12m$  et  $b=4m$ .

1. Montrer qu'un élément de surface  $d\vec{s}$  peut se mettre sous la forme :  $d\vec{s} = adz\vec{e}_y - ady\vec{e}_z$ .
2. En déduire  $F_y$  et  $F_z$  les composantes verticales et horizontales des forces exercées sur le barrage.



**Exercice 6 : Force exercée sur une ventouse.**

On considère une ventouse demi-sphérique  $S$  de masse négligeable.

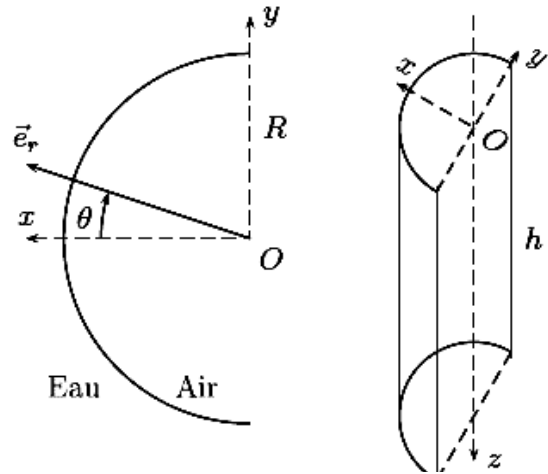


1. Représenter la force de pression élémentaire  $d\vec{f}$  appliquée par l'air environnant sur une surface élémentaire  $dS$  entourant le point  $M$ . Donner son expression vectorielle.
2. En déduire, par symétrie, la direction et le sens de la force de pression élémentaire  $d\vec{F}$  appliquée par l'air environnant sur la couronne de surface  $dS$  représentée sur le dessin.
3. En déduire la force  $\vec{F}$  appliquée sur la ventouse. Faire l'application numérique avec  $R=10cm$  et  $p_0=1bar$ .

**Exercice 7 : Force exercée sur un barrage hémicylindrique.**

Un barrage est constitué d'un demi-cylindre vertical de rayon R. Il retient de l'eau, de masse volumique  $\rho$  sur une hauteur h. Au dessus de la surface de l'eau et de l'autre côté du barrage, l'air impose la pression  $p_0$  uniforme.

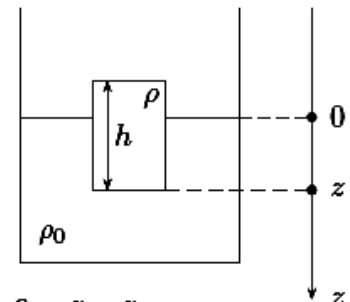
1. Justifier l'orientation du barrage : coté convexe vers l'eau.
2. Donner l'expression de la force élémentaire  $\overline{dF}$  exercée par l'eau et l'air sur une surface élémentaire ds. On précisera sa norme, sa direction et son sens en fonction des données.
3. Montrer, à l'aide des considérations de symétrie que la force exercée par l'eau et l'air sur le barrage est selon la direction Ox. En déduire l'expression de la composante utile de  $\overline{dF}$ .
4. Calculer enfin F la norme de la force exercée par l'eau sur le barrage.



**Exercice 8 : Oscillations verticales d'un cylindre dans l'eau.**

Un cylindre de section  $s=1\text{cm}^2$ , de hauteur  $h=10\text{cm}$  et de densité 0,6 (masse volumique  $\rho$ ) est placé dans l'eau (masse volumique  $\rho_0$ ). Un système annexe maintient son axe de révolution vertical.

1. Déterminer  $z_0$  la hauteur immergée à l'équilibre.
2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?
3. A partir de la position d'équilibre déterminée en 1., on enfonce légèrement le cylindre et on le lâche. On néglige les frottements et on pose  $\varepsilon = z - z_0$ . Montrer que le cylindre effectuera des oscillations dont on déterminera la période.



**Exercice 9 : Ballon sonde.**

Un ballon sonde, de masse totale m quand il ne contient pas de gaz, sert à emmener des appareils de mesure à haute altitude. Son enveloppe contient n moles de dihydrogène de masse molaire  $M=2\text{g/mol}$ . L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire  $M_a=29\text{g/mol}$  et de température  $T_0$  constante.

On pose  $n_0 = \frac{m}{M_a - M}$  et  $H = \frac{RT_0}{M_a g}$  où R est la constante des gaz parfaits.

1. Quelle est la force résultante ascensionnelle  $\overline{F} = F \overline{e}_z$  qui s'exerce sur ce ballon ?
2. Montrer que  $n_0$  est la valeur minimale de n assurant le décollage. En déduire le volume minimum  $V_0$  du ballon au départ (au sol,  $p=p_0=1\text{bar}$  et  $T=T_0=20^\circ\text{C}$ ) pour  $m=50\text{kg}$ .
3. Exprimer F en fonction de m, g, n et  $n_0$ .
4. Rappeler ou retrouver l'expression de p(z). Le volume V du ballon a une valeur maximale  $V_1$  à ne pas dépasser, montrer que cela implique une altitude maximale  $z_1$  à ne pas dépasser. Exprimer  $z_1$  en fonction de n,  $n_0$ , N,  $V_0$  et  $V_1$ .
5. En fait, à partir de  $z_1$ , une soupape s'ouvre, limitant le volume à  $V_1$ . Montrer que cela permet d'atteindre une nouvelle altitude  $z_2$  à déterminer.

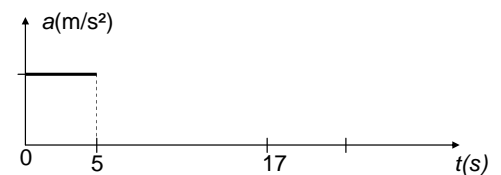
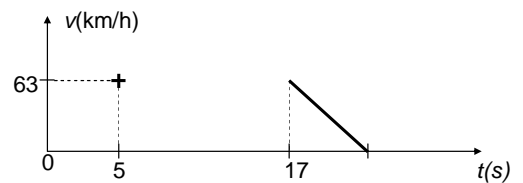
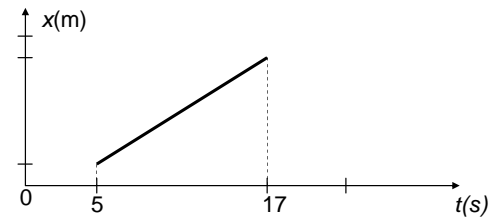
Travaux dirigés de Mécanique n° 1

**Exercice 1 : Analyse de graphiques**

Une voiture roulant sur une route horizontale rectiligne se déplace d'un point A vers un point B distants de 300m. On donne les informations partielles sur la position  $x$ , la vitesse  $v$  et l'accélération  $a$  de la voiture pendant ce trajet.

Compléter les graphiques en indiquant les valeurs et le type de courbe.

Calculer le temps  $T$  mis pour aller de A à B.



**Exercice 2 : Effet Doppler**

On travaille dans le référentiel lié au sol.

Un véhicule de pompier roule à la vitesse constante  $v_0$ , en émettant une sirène que l'on modélisera par une série de bips émis à la fréquence  $f_0$ .

1. Quel est l'intervalle de temps qui sépare deux bips pour un pompier situé à l'intérieur du véhicule ?
2. Même question pour un observateur immobile (durée  $T$ ) si le véhicule s'éloigne de lui. En déduire la fréquence des impulsions sonores perçues par l'observateur (fréquence  $f$ ).
3. Mêmes questions si le véhicule s'approche de l'observateur :  $T'$  et  $f'$ .

Données : Célérité du son dans l'air  $c_s \approx 340m.s^{-1}$ ,  $v_0 = 100km.h^{-1}$ ,  $f_0 = 400Hz$

**Exercice 3 : Laboratoire spatial**

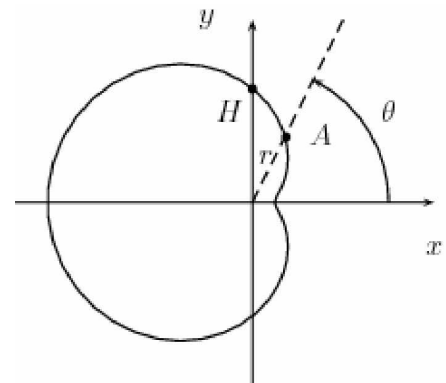
Un laboratoire spatial, constitué de deux anneaux concentriques de même axe, est en rotation uniforme autour de cet axe de manière à créer une gravité artificielle. Sa période de rotation  $T$  est choisie de manière à ce que l'accélération soit égale à l'accélération de la pesanteur sur Terre ( $9,81 m/s^2$ ) au niveau de l'un des anneaux (de rayon  $r_1=2,15 km$ ) et à l'accélération de la pesanteur sur Mars ( $3,72 m/s^2$ ) au niveau de l'autre.

Déterminer la valeur de  $T$  et le rayon  $r_2$  du second anneau.

**Exercice 4 : Déplacement d'un point matériel le long d'une came.**

Un point matériel A est astreint à se déplacer dans le plan  $Oxy$  d'un référentiel  $R$ , le long du pourtour d'une came fixe dans  $R$  (figure ci-contre).

L'équation polaire de la came est de la forme :  $r = b - c \cos \theta$ . La tige, qui permet le mouvement et réalise, à l'aide d'un ressort, le contact sur la came, tourne autour de l'axe  $Oz$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.



1. Exprimer, en coordonnées polaires, la vitesse et l'accélération de A par rapport à  $R$ .
2. Calculer  $v$  et  $a$  pour  $\omega = 30tours / min$ , lorsque A atteint le point H de la came défini par  $\theta_H = \frac{\pi}{2}$ , sachant que  $b=1,25cm$  et  $c=1cm$ .
3. A-t-on  $a_0 = \vec{v}_0$  ? Expliquez.

**Exercice 5 : Mouvement hélicoïdal**

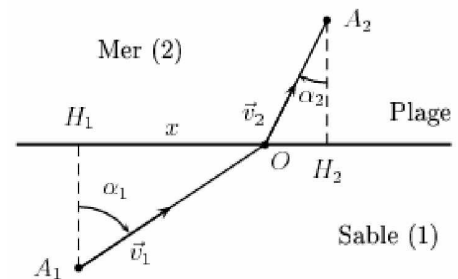
Les équations paramétriques d'une particule P dans un référentiel orthonormé R direct sont :  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = a \sin \omega t$  et  $z = h \omega t$  avec a, h et  $\omega$  des constantes positives.

1. Soit H la position de P dans le plan xOy
  - a. Montrer que H est animé d'un mouvement circulaire uniforme.
  - b. Sur quelle surface la trajectoire de P est-elle inscrite ? La représenter.
2. Calculez les composantes de  $\vec{v}(P/\mathcal{R})$  en coordonnées cylindriques ainsi que la vitesse numérique de P. Quelle remarque peut-on faire ? Déterminer s(t) la distance parcourue par la particule à l'instant t. Déterminez l'angle  $\alpha$  que fait  $\vec{v}(P/\mathcal{R})$  avec sa direction Oz. Que peut-on dire de  $\alpha$  ?
3. Calculez les composantes du vecteur accélération  $\vec{a}(P/\mathcal{R})$  en coordonnées cylindriques. Indiquez le support et le sens de  $\vec{a}(P/\mathcal{R})$ .

**Exercice 6 : Alerte à Malibu**

Soit une plage P, séparation entre deux milieux différents : le sable (milieu (1)) et la mer (milieu (2)).

Un maître nageur situé en A<sub>1</sub> sur le sable (à la distance A<sub>1</sub>H<sub>1</sub> = a<sub>1</sub> de P) repère une nageuse en difficulté en A<sub>2</sub> en mer (à la distance A<sub>2</sub>H<sub>2</sub> = a<sub>2</sub> de P). Il peut courir sur le sable à la vitesse v<sub>1</sub> et nager à la vitesse v<sub>2</sub> < v<sub>1</sub>. On notera T la durée du parcours A<sub>1</sub>OA<sub>2</sub>.



Quel trajet le maître nageur doit-il emprunter pour rejoindre la nageuse le plus rapidement possible ?

On déterminera d'accord l'équation que doit vérifier  $x = H_1O$ , puis on simplifiera l'expression obtenue en introduisant les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

A quelle loi physique l'expression obtenue vous fait-elle penser ?

**Exercice 7 : Spirale**

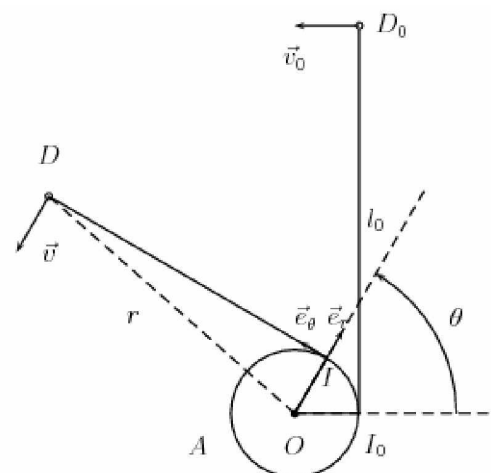
1. Un mobile M parcourt avec une vitesse constante de norme v la spirale d'équation polaire  $r = a\theta$  avec a constant. Exprimer  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  la vitesse de M en fonction de  $\theta$  et v dans la base polaire.

**Exercice 8 : Couché Brutus !**

Le chien Brutus est attaché au point A d'un arbre circulaire de rayon R par l'intermédiaire d'une laisse de longueur l<sub>0</sub> = 6πR.

La position de celle-ci par rapport à l'arbre est tangentielle. Il commence à courir à la date t=0 avec une vitesse tangentielle à tout instant et de norme constante v<sub>0</sub>, sa laisse restant tendue en permanence.

1. Donner en coordonnées polaires l'expression de la vitesse du chien Brutus à la date t en l'assimilant au point D.
2. En déduire les équations horaires du mouvement r(t) et  $\theta(t)$ .
3. Déterminer les composantes radiale et orthoradiale du vecteur accélération à la date t.
4. Ecrire en coordonnées polaires l'équation de la trajectoire et tracer son allure.
5. A quel endroit et à quelle date la course s'achève-t-elle ?



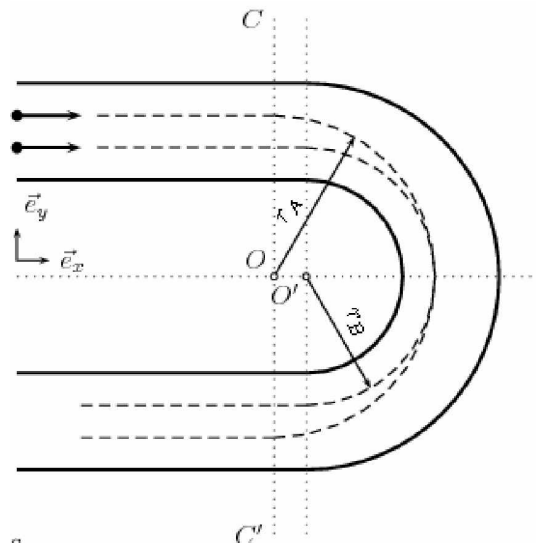
### Exercice 9 : Virage à la corde...

Lors d'un grand prix, deux voitures (A et B), arrivent en ligne droite, coupent l'axe  $CC'$  au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

La voiture A suit une trajectoire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $r_A=90\text{m}$ .

La voiture B suit une trajectoire circulaire de centre  $O'$  et de rayon  $r_B=75\text{m}$ .

On appelle  $R$  le référentiel  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux voitures sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe  $CC'$ .



1. Déterminer puis calculer les longueurs  $L_A$  et  $L_B$  des trajectoires des deux voitures. Peut-on conclure ?
2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses  $v_A$  et  $v_B$  constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 voitures restent inférieures à  $0,8g$  avec  $g$  l'accélération de la pesanteur (au delà de cette limite, les voitures dérapent et finissent leur course dans le bac à gravier ou dans les pneus).
3. Conclure.

## Travaux dirigés de Mécanique n°10

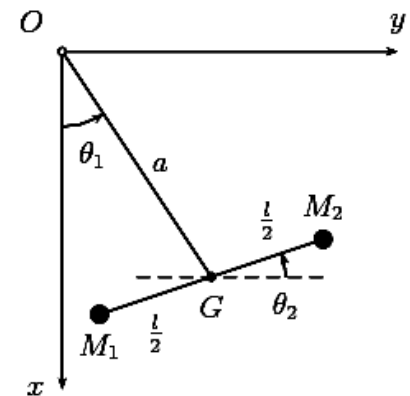
### Exercice 1 : Théorèmes de Koenig

Deux boules identiques  $M_1$  et  $M_2$  assimilables à deux points matériels de masse  $m$ , sont fixées aux deux extrémités d'une barre de longueur  $l$  et de masse négligeable.

Cette barre astreinte à rester dans le plan  $Oxy$ , est articulée en son centre d'inertie  $G$  à une tige  $OG$  de masse négligeable et de longueur  $a$ .

Le mouvement est repéré par les angles  $q_1$  et  $q_2$ .

1. Calculer le moment cinétique  $\overline{L}_0$  du système en fonction de  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$ ,  $m$ ,  $l$  et  $a$ .
2. Calculer l'énergie cinétique  $E_c$  du système en fonction des mêmes paramètres.



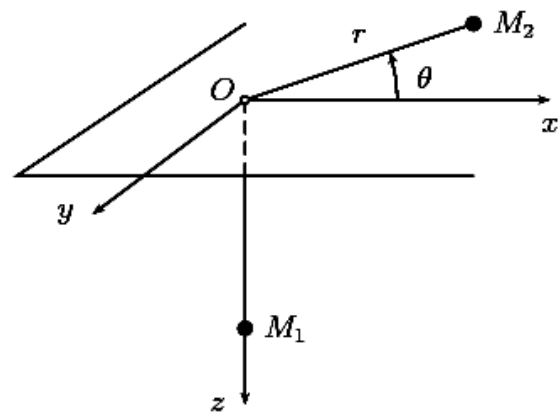
### Exercice 2 : Utilisation de l'énergie potentielle effective.

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  sont reliés par un fil inextensible de longueur  $l$  et de masse négligeable.

Les points  $M_1$  et  $M_2$  sont assujettis à se déplacer sans frottement, le premier sous l'action de son poids sur l'axe vertical  $Oz$  dirigé vers le bas et le second sur le plan horizontal  $Oxy$  sous l'action du fil qui coulisse sans frottement à travers un trou quasi ponctuel situé en  $O$ .

A  $t=0$ ,  $M_1$  est abandonnée sans vitesse initiale et  $M_2$ , situé en  $A$  tel que  $\overline{OA} = \overline{r}_0$  possède une vitesse  $\overline{v}_0$  normale à  $\overline{OA}$  et de norme  $v_0$ .  $\overline{v}_0$  est dans le plan  $Oxy$ .

1. Pour quelle valeur  $v_c$  de  $v_0$ , le point  $M_1$  reste-t-il immobile ? Quel est, dans ces conditions, le mouvement de  $M_2$  ?
2. Calculez l'énergie potentielle effective  $E_{p,eff}(r)$  du système et tracez son allure. On notera  $L$  le moment cinétique de  $M_2$  par rapport à  $O$ .
3. Discutez le mouvement de  $M_2$  en fonction de  $E_0$  (discussion graphique).



### Exercice 3 : Utilisation de l'énergie potentielle effective.

Deux points matériels  $M_1$  (de masse  $m_1$ ) et  $M_2$  (de masse  $m_2$ ) qui constituent un système isolé sont soumis

à des forces d'interaction dérivant d'une énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{2}kr^2$  avec  $k \geq 0$  et  $r = M_1M_2$ .

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective  $E_{p,eff}(r)$  et tracez son allure.
2. En déduire les états liés et états de diffusion éventuels.

### Exercice 4 : Etoile double.

Dans un étoile double, les étoiles composantes, en interaction gravitationnelle, sont considérées comme ponctuelles, leurs masses sont  $m_1$  et  $m_2$ .

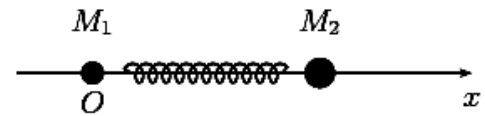
Elles peuvent être considérées comme isolées mécaniquement.

L'étoile de masse  $m_2$  décrit une trajectoire circulaire uniforme  $r$  autour de l'étoile de masse  $m_1$  dans le référentiel dont l'origine est le centre de l'étoile 1.

1. Quelles sont les trajectoires de ces étoiles autour de leur centre d'inertie  $G$  ?
2. Soit  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de l'étoile 2 dans le référentiel du centre d'inertie. Déterminer  $\omega$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r$  et de la constante de gravitation. On introduira la notion de mobile réduit.
3. Déterminer l'énergie cinétique totale de système dans le référentiel du centre d'inertie, puis l'énergie potentielle et enfin l'énergie mécanique.

### Exercice 5 : Système de deux points. Référentiel barycentrique.

Deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1 = m/2$  et  $m_2 = m$  sont reliés par un ressort de masse nulle, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Un dispositif assure la guidage sans frottement le long d'un axe  $Ox$  galiléen de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ .



Initialement,  $M_1$  a l'abscisse  $x_1(0)=0$  et  $M_2$  l'abscisse  $x_2(0)=l_0$  et sont au repos dans  $R$  galiléen. On communique brutalement (choc) à  $M_1$  une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  avec ( $v_0 > 0$ ) à l'instant  $t=0$ .

1. Déterminer la position et la vitesse de  $M_1$  et  $M_2$  immédiatement après le choc sachant qu'il est infiniment bref.
2. Donner l'équation différentielle que vérifie  $\vec{r}$  avec  $\vec{r} = \overline{M_1 M_2}$ . Déterminer  $\vec{r}(t)$ .
3. Etudier les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  suivant l'axe  $Ox$  :  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

### Exercice 6 : Vitesses limites de particules en état de diffusion.

On considère dans le référentiel galiléen  $R_L$  du laboratoire, deux particules  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  et dont les charges électriques sont  $q_1$  et  $q_2$  telles que  $q_1 q_2 > 0$ .

A l'instant initial, on lâche ces 2 particules sans vitesse initiale et à la distance  $r_0$  l'une de l'autre. En négligeant le poids des particules devant l'interaction électromagnétique, calculer leurs vitesses limites  $v_{1\infty}$  et  $v_{2\infty}$  quand  $M_1 M_2 \rightarrow \infty$ .

1. En utilisant la notion de centre de masse et la conservation de l'énergie mécanique du système.
2. En étudiant le mouvement de la particule fictive  $M$  dans le référentiel barycentrique.

**Travaux dirigés de Mécanique n°11**
**Exercice 1 : Déviation d'une balle de fusil.**

Une balle de fusil est tirée, horizontalement, dans la direction du Nord, depuis un point de la Terre, de latitude  $\lambda=43^\circ$ . Sa vitesse initiale est  $v_0=1000\text{m.s}^{-1}$ . On travaillera dans le repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  vertical ascendant et  $Oy$  orienté vers le Nord et on notera  $\omega$  la vitesse angulaire de la Terre dans son mouvement diurne.

1. Déterminer l'équation du mouvement de ce projectile sous la seule action de la pesanteur (référentiel local galiléen) et calculez la position  $\Delta z$  de l'impact sur une cible située à 100m plus au nord et à la même distance du sol.
2. Étudiez qualitativement l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement de la balle.
3. Donnez les équations différentielles du mouvement en négligeant la résistance de l'air.
4. Simplifier les équations précédentes en justifiant.
5. Quelle est la déviation due à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ? Vérifier, à posteriori les approximations faites dans la question précédente.

**Exercice 2 : Tir de canon vers le zénith.**

En un lieu  $A$  de latitude  $\lambda=48^\circ$ , un canon tire un obus dont la vitesse initiale est  $v_0=300\text{m.s}^{-1}$  suivant la verticale ascendante  $Az$ . On désigne par  $Axyz$  un repère orthonormé lié à la Terre,  $Ax$  étant dirigé vers le Nord. On néglige la résistance de l'air et la variation de  $g$  avec l'altitude.

1. Étudiez le mouvement de l'obus en considérant  $Axyz$  comme galiléen. Quelle est l'altitude maximale atteinte par l'obus ?
2. Reprendre l'étude précédente en tenant compte de la force de Coriolis et en considérant l'expression de la vitesse de l'obus obtenue en 1. comme une première approximation. Donnez une valeur approchée de  $y$  à la date  $t$ .
3. A quelle distance de  $A$  l'obus retombe-t-il ? L'expérience a été réalisée au XVII siècle par le Père MERSENNE, quel fut à votre avis son résultat ?

**Exercice 3 : Fil tendu entre deux satellites.**

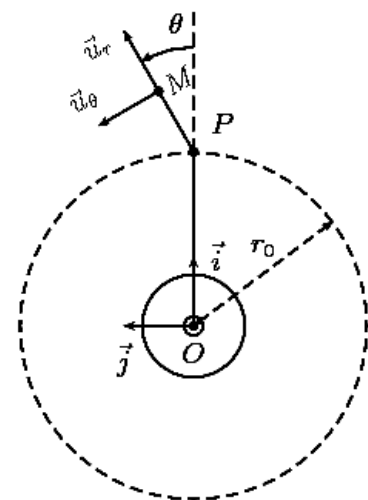
Un satellite  $P$  est placé en orbite circulaire autour du centre  $O$  de la Terre. Le rayon de sa trajectoire est  $r_0=OP$  et son vecteur rotation  $\vec{\Omega}=\Omega\vec{k}$ . Le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère direct tournant avec le satellite tel que  $\vec{OP} = r_0\vec{i}$ .

On relie un fil sans masse au satellite, au bout duquel on accroche un point matériel  $M$ , de masse  $m$ . La longueur du fil est  $l = PM \ll r_0$  et on admet que le fil reste tendu et dans le plan de la trajectoire.

On cherche à étudier le mouvement du pendule ainsi constitué par rapport au satellite c'est à dire dans le repère tournant.

On note  $G$  la constante de gravitation universelle,  $M_T$  la masse de la Terre,  $\vec{T}$  la tension du fil,  $\vec{a}$  l'accélération de  $M$  dans  $R$  et  $\vec{v}$  sa vitesse.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à  $M$  dans  $R$  non galiléen : équation vectorielle (1).





- Expliciter les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\overline{OM}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  dans la base polaire en fonction de  $l$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  et des vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ . En déduire la forme prise par l'équation (1) si on la projette sur  $\vec{u}_\theta$ .
- Montrer que le mouvement du satellite est tel que  $\Omega^2 = \frac{GM_T}{r_0^3}$ .
- Effectuer un développement limité de  $\frac{1}{OM^3}$  au premier ordre en  $\frac{1}{r_0}$  : On décomposera  $\overline{OM}$  suivant  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  puis on calculera  $\|\overline{OM}\|^2 = OM^2$  et enfin  $\frac{1}{OM^2}$  en utilisant  $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$  si  $\varepsilon \ll 1$ . En déduire l'équation différentielle en  $\theta$  du pendule.
- On se place dans le cas  $\theta \ll 1$ . Préciser alors la nature du mouvement de  $M$ .

### Exercice 5 : Limite de Roche.

Soit un satellite sphérique de rayon  $R_s$ , de centre  $S$ , de masse volumique  $\mu_s$  soumis uniquement à l'action gravitationnelle d'un astre à symétrie sphérique de rayon  $R_A$  et de masse volumique  $\mu_A$ . La distance entre le centre du satellite et le centre de l'astre est  $d$ .

- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un petit élément de volume du satellite de masse  $dm$  dans le référentiel lié au satellite qui est en translation elliptique par rapport au référentiel lié à l'Astre, considéré comme galiléen.
- On considère que le satellite se disloque sous l'effet des forces de marée quand celles-ci deviennent de l'ordre de grandeur de la force de gravitation due au satellite lui-même. En étudiant ce qui se passe à la surface du satellite, pour un point situé sur  $SA$  entre  $S$  et  $A$ , montrer que si  $d$  est inférieure à une distance  $d_R$ , que l'on calculera, le satellite éclate. On rappelle que  $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$  quand  $\varepsilon \ll 1$ .

Un calcul plus complet effectué par Roche en 1850 donne  $d_R = 2,45R_A \sqrt[3]{\frac{\mu_A}{\mu_S}}$ . Conclusion ?

- Calculer  $d_R$  pour le système Terre-Lune. Conclusion.
- Calculer  $d_R$  pour le système Io-Jupiter. Conclure sur le volcanisme de Io.
- Expliquer la présence des anneaux de Saturne à l'aide de cette théorie. Le rayon de l'anneau le plus proche vaut 75000km. Estimer la masse volumique des débris qui forment cet anneau.

Données :

Corps	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Rayon(km)
Terre	5500	6370
Lune	3300	
Jupiter	1300	71000
Io	3500	
Saturne	600	60000

Travaux dirigés de Mécanique n° 2

**Exercice 1 : Glissement d'un objet sur un plan incliné**

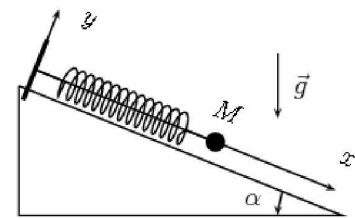
Soit un objet de centre d'inertie  $M$  et de masse  $m$  posé sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $f_0$  le coefficient de frottement statique et  $f$  le coefficient de frottement dynamique.

1. Pour quelle valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  l'objet va-t-il commencer à glisser sur le plan incliné (mouvement de translation) ?

Etudier le mouvement ultérieur,  $x(t)$  où  $x$  est le déplacement de l'objet sur le plan incliné.

**Exercice 2 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné**

On considère un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ , dont les extrémités sont reliées à un point fixe  $O$  et un point matériel  $M$  de masse  $m$ .



On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe  $Ox$  sur le plan incliné (voir figure)

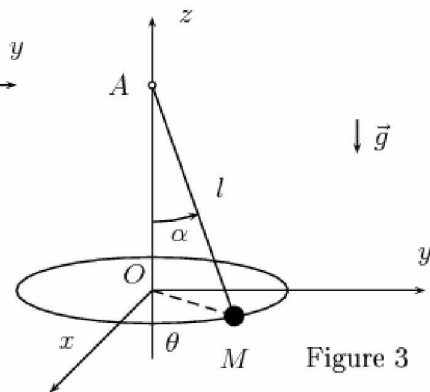
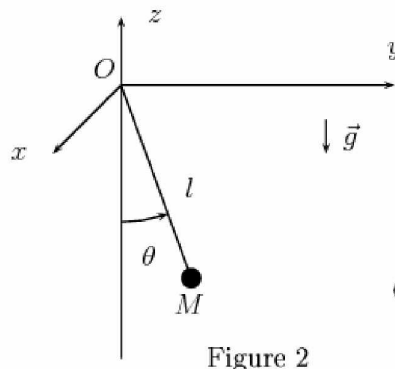
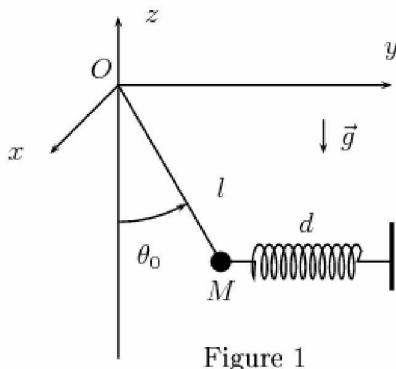
1. Déterminer  $l_e$ , la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de  $l_0, m, g, k$  et  $\alpha$ .
2. A partir de la position d'équilibre,  $M$  est déplacé d'une distance  $d$  comptée algébriquement sur  $Ox$  et lâché sans vitesse initiale. Etablir l'équation horaire du mouvement de  $M$  en fonction de  $d, k, m$  et  $l_e$ .

**Exercice 3 : Etude d'un pendule**

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur  $l$ , de masse négligeable, fixé en  $O$  et auquel on a accroché une petite bille de masse  $m$  assimilable à un point matériel  $M$ .  $O$  est fixe dans le référentiel du laboratoire  $\mathfrak{R}$  galiléen.

1. Etude statique : dans un premier temps, on accroche à  $M$  un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $d_0$ .

A l'équilibre dans  $\mathfrak{R}$ , la longueur du ressort prend la valeur  $d$  quand le fil s'écarte de l'angle  $\theta_0$  par rapport à la verticale tout en restant dans le plan  $Oyz$  (figure 1). En déduire l'expression de  $m$  en fonction des autres données.

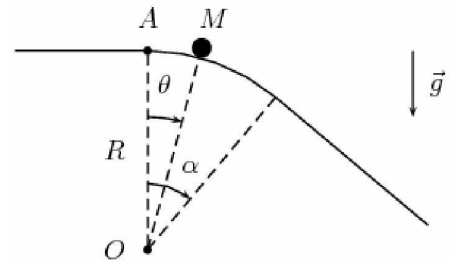


2. Première étude dynamique : à l'instant initial, le ressort se détache de  $M$  (figure 2).
  - a. Etablir l'équation différentielle reliant  $\theta$  à ses dérivées temporelles (on néglige tout frottement).

- b. En déduire  $\theta(t)$  pour les petites oscillations ( $\sin\theta \approx \theta$ ;  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ).
  - c. Exprimer la tension du fil en fonction du temps toujours dans le cas des petites oscillations.
3. Pendule conique : le fil est accroché en A et le point matériel M, tourne maintenant dans le plan  $xOy$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega = \dot{\theta}$  autour de l'axe OA (figure 3) avec un angle  $\alpha = cte$  entre AM et la verticale. Calculer la tension T puis l'angle  $\alpha$  en fonction de  $m, g, l$  et  $\omega$ , montrer que  $\omega$  doit vérifier une certaine condition.

**Exercice 4 : Course poursuite**

Starky et Hutsh poursuivent un voleur en fuite dans les rues de San Francisco. Leur voiture, assimilée à son centre de masse M circule à la vitesse  $v_0$  constante sur une route horizontale. Elle aborde en A une descente modélisée par un arc de cercle de rayon R et d'angle  $\alpha$  suivie d'une partie rectiligne. Le conducteur se place au point mort (force motrice nulle) et on néglige les frottements.

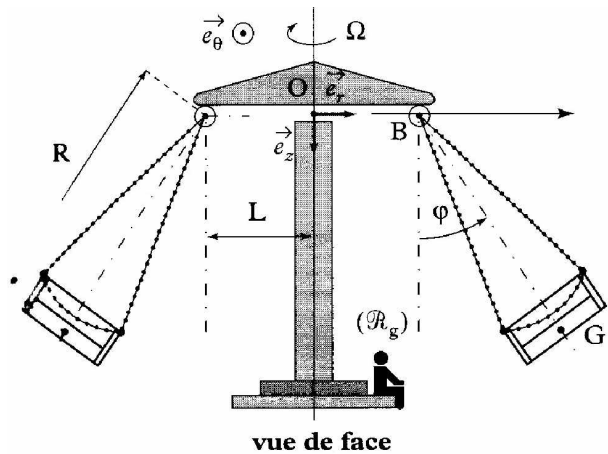


- 1. A quelle condition sur  $\alpha$  la voiture va-t-elle forcément quitter la route, même si  $v_0=0$ .
- 2. A quel endroit ( $\theta_0$ ) la voiture quittera-t-elle la route ? Quelle sera alors sa vitesse ?

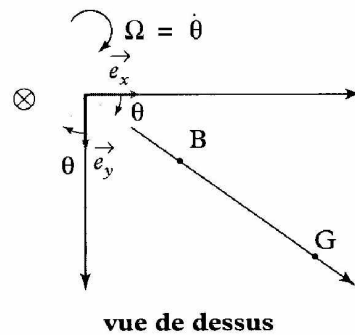
On donne :  $R=130m, g=10m.s^{-1}, v_0=126km/h$  et  $\alpha=15^\circ$ .

**Exercice 5 : A la fête foraine...**

On étudie le mouvement d'une balancelle assimilée à un point matériel G de masse m reliée au manège (qui tourne autour de l'axe vertical  $(O; e_z)$  à la vitesse angulaire constante  $\Omega = \dot{\theta} = cte$ ) par l'intermédiaire d'un câble de masse négligeable, dont l'action est modélisée par une tension  $T$  de G vers B, appliquée en G. L'angle d'inclinaison  $\phi$  est constant. On suppose le référentiel d'étude galiléen.



- 1. Etablir une relation entre  $\phi, \Omega, L$  et  $R$ .
- 2. Tracer  $\Omega$  en fonction de  $\phi$ . Faire un commentaire quant à l'utilisation du manège. On donne  $L=3m$  et  $R=7m$ .



### Exercice 6 : Saut à l'élastique

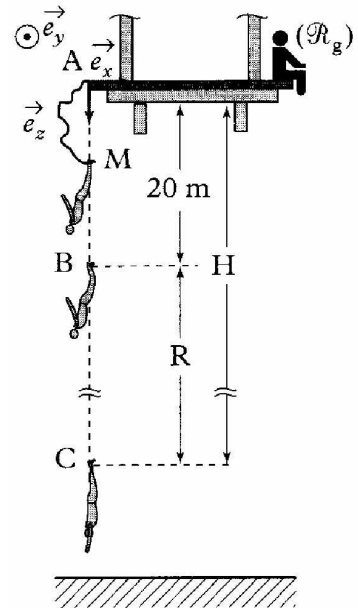
Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel  $M$ , de masse  $m=70\text{kg}$ , tombe depuis un pont (en A) avec un élastique accroché aux pieds.

Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre.

A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide  $l_0=20\text{m}$  et de raideur  $k=120\text{N/m}$ .

On suppose que le référentiel est galiléen et on néglige tous les frottements.

1. Déterminer la vitesse du sauteur en B (après 20m de chute libre).
2. Déterminer la hauteur totale de chute.
3. Déterminer l'accélération maximale pendant le saut.



### Exercice 7 : Chute avec frottements fluides

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à l'action de son poids  $p$  et une force de frottements fluides dus à l'air  $f=-kv$  (on néglige la poussée d'Archimède). En atmosphère très calme, on considère la vitesse initiale de la goutte nulle.

1. Ecrire l'équation différentielle en  $\mathbf{v}$  du mouvement de la goutte (équation vectorielle).
2. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite  $\mathbf{v}_1$  que l'on exprimera en fonction de  $k$  et  $g$ . En déduire la valeur de  $k$ .
3. Trouver l'expression de  $\mathbf{v}(t)$ .
4. Calculer la durée de chute pour que la vitesse limite soit atteinte à  $10^{-n}$  près. Faire l'application numérique pour  $n=2$ .

Données :  $m=10^{-6}\text{kg}$  ;  $g=9,81\text{m/s}^2$  ;  $v_1=5.10^{-3}\text{m/s}$ .

### Exercice 8 : Frottements proportionnels à $v^2$

Un solide considéré comme un point matériel de masse  $m=20\text{kg}$  est lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme. L'air exerce sur lui une force de frottement opposée à la vitesse et de norme  $f=\alpha v^2$  ( $\alpha>0$ ).

1. On constate que le solide atteint une vitesse limite  $v_1=45\text{m/s}$ . Calculer  $\alpha$ .
2. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte à 0,1% près ?

On posera  $u = v/v_1$  et on rappelle que  $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + cte$ .

## Travaux dirigés de Mécanique n° 3

### Exercice 1 : Tir vertical

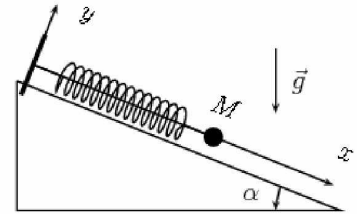
Un obus est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ .

Quelle altitude maximale  $H$  va-t-il atteindre ? On utilisera une méthode énergétique et on néglige les frottements.

### Exercice 2 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

On considère un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ , dont les extrémités sont reliées à un point fixe  $O$  et un point matériel  $M$  de masse  $m$ .

On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe  $Ox$  sur le plan incliné (voir figure). On prendra  $O$  comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur. On donne  $m=0,2\text{kg}$ ,  $l_0=30\text{cm}$ ,  $k=10\text{N.m}^{-1}$ ,  $g=10\text{m.s}^{-2}$  et  $\alpha=30^\circ$ .



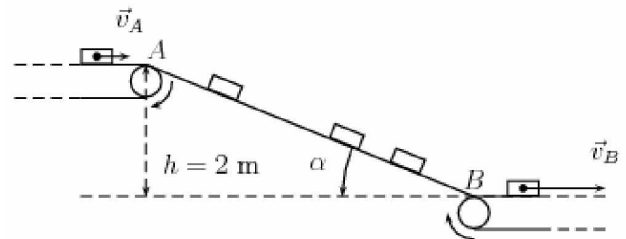
1. Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  de  $M$  en fonction des données et de  $x$ . Tracer la courbe  $E_p(x)$ .
2. On lâche  $M$  en  $x=20\text{cm}$  avec une vitesse vers le bas de  $1\text{m.s}^{-1}$ . En utilisant le graphe précédent, que peut-on dire du mouvement de  $m$  ?
3. A quelle abscisse s'immobilisera la masse  $m$  si les frottements ne sont pas tout à fait nuls.

### Exercice 3 : Au tri postal.

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à vitesse constante  $v_A = 0,5\text{m.s}^{-1}$ . Les

colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est  $f = 0,4$ . Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis roulant avance à la vitesse  $v_B = 0,2\text{m.s}^{-1}$ . Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

On suppose que le référentiel d'étude est galiléen. Donner l'expression puis la valeur numérique de l'angle  $\alpha$  qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.



### Exercice 4 : Mouvement des atomes

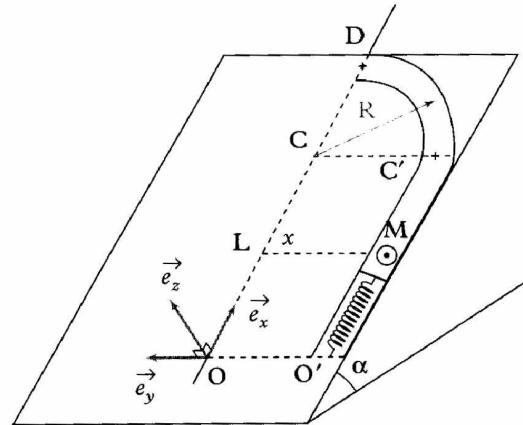
Une molécule HCl est modélisée par deux atomes H et Cl, séparés par une distance  $r$  sur un axe fixe dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  ; l'atome Cl est supposé fixe et pris comme origine du référentiel. L'atome H, assimilé à un point matériel de masse  $m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{kg}$  est en mouvement dans  $\mathcal{R}_g$ , sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle :

$$E_p(r) = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}, \text{ avec } C = 1,06 \cdot 10^{-138} \text{ J.m}^{12} \text{ et } K = 92,16 \cdot 10^{-3} \text{ J.m}.$$

1. Déterminer graphiquement, puis par le calcul la position d'équilibre  $r_0$ . Discuter la stabilité de la position d'équilibre  $r_0$ .
2. Déterminer et calculer l'énergie de dissociation de la molécule HCl. (On l'exprimera en eV)
3. Déterminer la fréquence des petites oscillations de la molécule.

**Exercice 5 : La bille du flipper**

Une bille de flipper de masse  $m$ , assimilée à un point matériel  $M$  est lancée par un ressort et se déplace sans frottement à l'intérieur d'un guide rectiligne se terminant en arc de cercle. Le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.



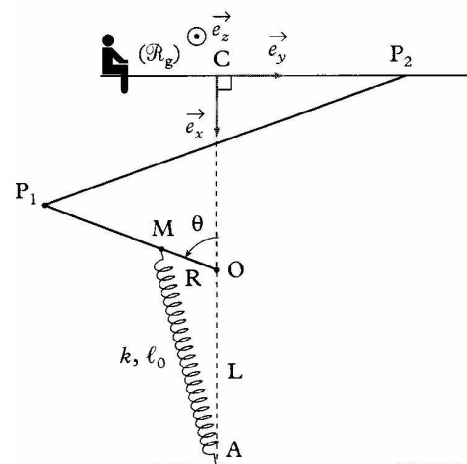
Le ressort possède une raideur  $k$  et une longueur à vide  $l_0$ ; la position  $O'$ , origine des  $x$ , correspond à l'extrémité fixe du ressort. La bille repose sur l'extrémité du ressort à  $t=0$ , on comprime le ressort jusqu'à ce que sa longueur soit  $x_0$ , puis on le laisse évoluer (sans vitesse initiale), il se détend alors et met en mouvement la bille.

1. Pour quelle position  $x_{lib}$  la bille quitte t'elle le ressort ? A l'aide du TEM, calculer la vitesse  $v_0$  de la bille lors de sa libération.
2. En utilisant le TEM exprimer la position  $x_l$  de la bille où sa vitesse s'annule.
3. Tracer la courbe  $x_l=f(x_0)$ . Donner la longueur de compression minimale nécessaire pour que la bille sorte du guide en D.

On donne :  $R=20m, g=10m.s^{-1}, m=0,1kg, k=40N.m^{-1}, L=80cm, l_0=12cm$  et  $\alpha=10^\circ$ .

**Exercice 6 : La porte de garage**

Une porte de garage  $P_1P_2$  de longueur  $2L$  peut se mettre en mouvement ( $P_2$  se déplace sur l'axe  $(C; \vec{e}_y)$  sans frottement,  $P_1$  a un mouvement circulaire de rayon  $L$  autour de  $(0; \vec{e}_z)$ ). On modélise cette porte en s'intéressant uniquement au triangle  $OAM$  (une masse  $m$  étant placée en  $M$ ). La tige  $OM$  est rigide, de masse négligeable et de rayon  $R$ . Un ressort de longueur à vide  $l_0$ , de raideur  $k$  exerce une force de rappel élastique sur le point  $M$  (elle est constamment dirigée vers le point  $A$ ).

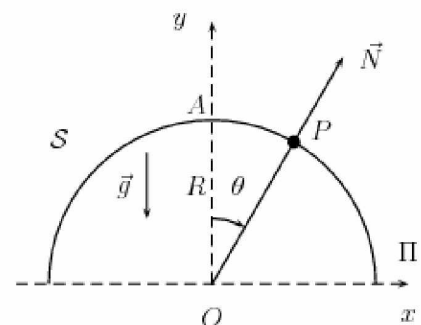


1. Exprimer l'énergie potentielle du point matériel  $M(m)$  en fonction de l'angle  $\theta$ .
2. Déterminer les positions d'équilibre du point matériel  $M(m)$  et discuter leur stabilité. Conclure.

Données :  $m=30kg ; R=10cm ; L=10R=1m ; l_0=12R=1,2m ; k=50000N.m^{-1}$ .

**Exercice 7 : Palet sur une demi-sphère**

Un palet assimilable à un point matériel de masse  $m$  est abandonné sans vitesse initiale en équilibre instable au sommet  $A$  d'une demi-sphère  $S$  de rayon  $R$  et de centre  $O$  posée sur le plan  $\Pi$ . Le contact de  $S$  et de  $P$  est sans frottement. A la suite d'un déséquilibre infinitésimal,  $P$  se met en mouvement en restant dans le plan vertical  $Oxy$ . On admet que, dans la phase (1) de son mouvement,  $P$  reste en contact avec  $S$ . Sa position est repérée par l'angle  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OP})$ .



1. Déterminer la vitesse de  $P$  en fonction de  $\theta, g$  et  $R$ .
2. Exprimer la projection de  $\vec{N}$  sur  $OP$  en fonction de  $m, \theta$  et  $g$ .
3. En déduire la valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  pour laquelle  $P$  n'est plus en contact avec  $S$  (phase (2) du mouvement de  $P$ ) et  $v_0$  la vitesse de  $P$ .
4. Décrire l'allure de la trajectoire ultérieure de  $P$ .

## Travaux dirigés de Mécanique n°4

### Exercice 1 : Mesure d'un coefficient de viscosité

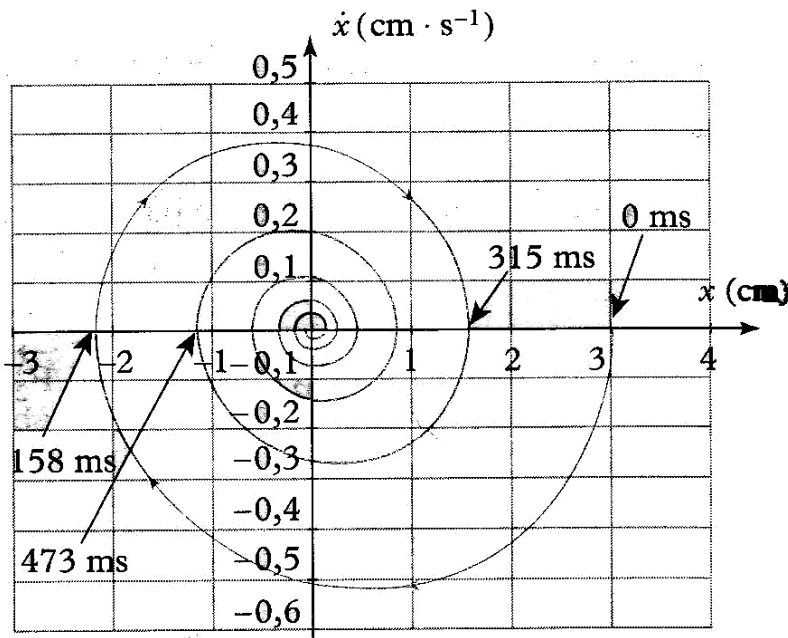
Une sphère de rayon  $R$  est animée d'une vitesse  $\vec{v}$ , plongée dans un liquide de viscosité  $\eta$ , est soumise à une force de frottement qui, lorsque la vitesse est faible (régime laminaire), a pour expression :  $\vec{F}_s = -6\pi\eta r\vec{v}$ .

Une telle sphère de masse  $m$  est suspendue à un ressort de raideur  $k$ . Sa période d'oscillation dans l'air, où le frottement est négligeable est  $T_0$ .

On la plonge dans un liquide de coefficient de frottement  $\eta$ ; sa pseudo-période est alors  $T$ . Donner l'expression de  $\eta$  en fonction des caractéristiques de la sphère, de  $T$  et  $T_0$ .

Note : on posera  $2\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m}$  et on négligera la poussée d'Archimède.

### Exercice 2 : Portrait de phase

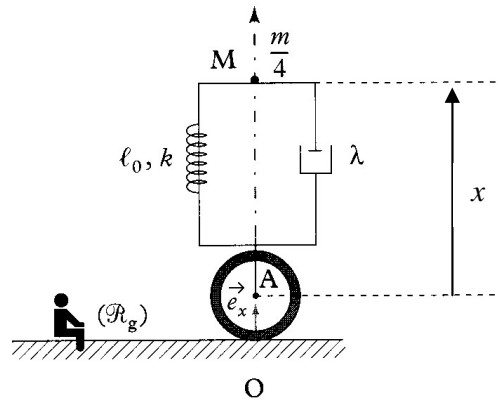


On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse  $m=500\text{g}$  soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur  $k$ ) et à une force de frottement fluide  $-\lambda\vec{v}$  ( $\vec{v}$  étant la vitesse de la masse  $m$  et  $x$  est l'écart à la position d'équilibre).

L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

1. Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
2. Déterminer par lecture graphique :
  - a. La valeur initiale de la position  $x_0$ .
  - b. La valeur finale de la position  $x_f$ .
  - c. La pseudo-période  $T$ .
  - d. Le décrément logarithmique.
  - e. Le facteur de qualité  $Q$ .
3. En déduire par le calcul, la pulsation propre  $\omega_0$ , le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur, la raideur  $k$  du ressort et le coefficient de frottement fluide  $\lambda$ .

**Exercice 3 : Amortisseur de voiture.**



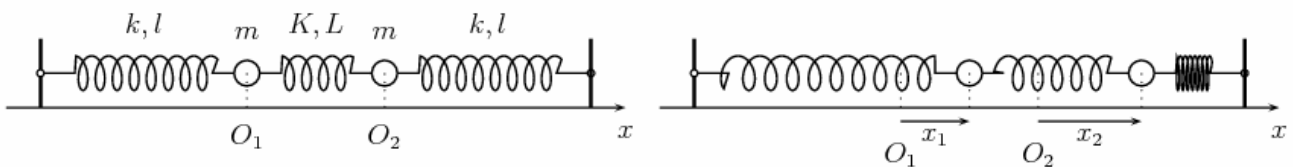
On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement  $\lambda$ . Une masse  $m/4$  est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe  $(0; \vec{e}_x)$  lié au référentiel terrestre supposé galiléen.

Donnée :  $m=1200\text{kg}$ .

1. Lors du changement d'une roue, on soulève d'une hauteur  $h=25\text{cm}$  la masse  $m/4$ , ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol :  $AM$  vaut alors  $40\text{cm}$ .
2. Déterminer et calculer  $\lambda$  afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse  $m/4$  en mouvement vertical).
3. On enfonce la masse  $m/4$  d'une hauteur  $d=5\text{cm}$  et on lâche le système à  $t=0$  sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude  $x$  de la masse  $m/4$ .
4. On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut  $m=2200\text{kg}$ . Déterminer les paramètres de l'amortisseur  $Q$  et  $\omega_0$ . Tracer l'allure de la réponse lorsqu'on enfonce de  $x_0=5\text{cm}$  la masse  $m/4$  et qu'on la lâche sans vitesse initiale à  $t=0$ . Conclure.

**Exercice 4 : Oscillateurs couplés, mise en équation**

On étudie le dispositif suivant constitué de 3 ressorts linéaires de raideurs respectives  $(k, K$  et  $k)$  liés à deux masses identiques  $m$ , mobiles sur l'axe  $Ox$ . Les frottements sont de la forme :  $-\lambda \vec{v}$  sur chaque masse où  $\vec{v}$  est la vitesse de la masse.



Soit  $x_1$  et  $x_2$  les élongations des deux masses à partir de leur position d'équilibre. Ecrire les équations différentielles couplées liant  $x_1$  et  $x_2$ .



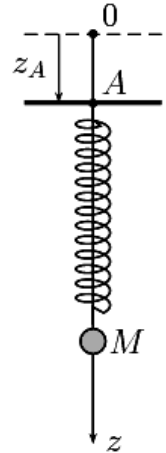
**Travaux dirigés de Mécanique n°5**
**Exercice 1 : Ressort vertical**

On considère le système représenté ci-contre : une bille  $M$ , quasi ponctuelle, de masse  $m$  est suspendue à un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de constante de raideur  $k$ .

L'autre extrémité du ressort (notée  $A$ ) est liée à un système qui lui assure un mouvement vertical d'amplitude  $D$  et de pulsation  $\omega$ .

On tiendra compte d'une force de frottement  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$  s'exerçant sur  $M$ .

1. Déterminer la position  $z_{eq}$  de  $M$  à l'équilibre de  $M$  et  $A$ .
2. Etablir l'équation différentielle dont  $z$  est la solution.
3. Donner l'expression de l'amplitude des oscillations de  $M$  en régime forcé.


**Exercice 2 : Sismographe**

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur naturelle  $l_0$ , d'un amortisseur de coefficient de frottement  $h$  et d'une masse  $M(m)$  considérée comme ponctuelle.

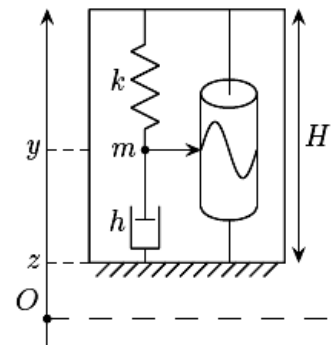
Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide. L'amortisseur exerce sur la masse  $M$  une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de  $M$  par rapport au cadre.

Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse  $m$  par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse  $m$  (voir figure).

Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal :

$z(t) = Z \cos(\omega t)$ . Le référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_z)$  est supposé galiléen.

1. Déterminer l'équation d'évolution de  $y(t)$ , cote de la masse  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
2. En déduire l'équation d'évolution de  $x(t)$ , écart entre la longueur  $l(t)$  du ressort à un instant  $t$  et sa longueur  $l_{eq}$  à l'équilibre.
3. Déterminer l'amplitude réelle  $X$  des oscillations de la masse et tracer l'allure pour quelques valeurs du facteur de qualité.
4. Comment choisir  $Q$  pour que  $X$  vaille  $Z$  à 5% près sur la plus grande plage de pulsations possible ?


**Exercice 3 : Suspension automobile.**

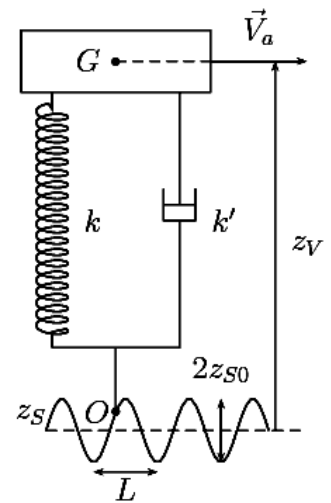
On étudie le mouvement vertical d'un véhicule de masse  $M=10^3\text{kg}$ . Sa suspension est modélisée par un ressort de raideur  $k=10^5\text{N.m}^{-1}$  et de longueur à vide  $l_0$ , associé à un amortisseur de constante d'amortissement  $k'=4.10^3\text{N.m}^{-1}.s$ .

La force exercée par l'amortissement est de la forme  $-k'\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la vitesse relative des deux extrémités.

Le véhicule se déplace à vitesse constante  $V_a = 50\text{km.h}^{-1}$  sur un sol ondulé horizontal. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale  $L=2\text{m}$  et d'amplitude  $z_{s0} = 5\text{cm}$  comptée à partir de la ligne moyenne.

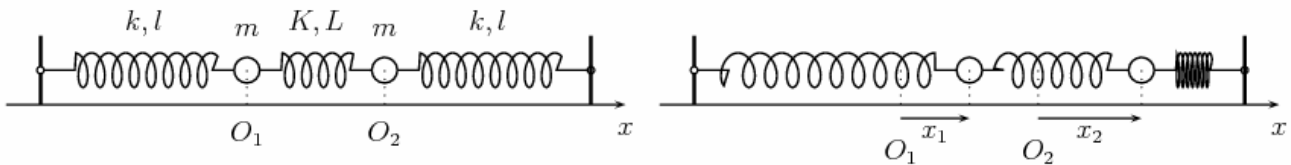
Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le rayon de la roue est nul, c'est à dire que le centre  $O$  de la roue suit exactement l'ondulation du sol.

1. Donner l'expression de la pulsation d'excitation  $\omega$  de la suspension en fonction de la vitesse  $V_a$  du véhicule et de la période spatiale  $L$ .
2. Faire un schéma pour la mise en équation du système où seront explicitées les forces agissant sur celui-ci.
3. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée  $z = z_V - z_{V,eq}$  liant cette dernière à la coordonnée  $z_S$  avec  $z_{V,eq}$  la valeur de  $z_V$  à l'équilibre et pour  $z_S=0$ .
4. Donner les expressions de la réponse complexe  $\underline{Z}/\underline{Z}_S$  ainsi que son module  $|\underline{Z}/\underline{Z}_S|$  où  $\underline{Z}$  est l'amplitude complexe de la grandeur complexe  $z$  associée à  $z(t)$  et  $\underline{Z}_S$  l'amplitude complexe de celle associée à  $z_S(t)$ . On posera  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$  et  $Q = \frac{M \omega_0}{k'}$ .
5. Représenter la courbe de Bode pour  $|\underline{Z}/\underline{Z}_S|$ . Préciser les points particuliers (origines, asymptotes, extrema) et donner leurs valeurs numériques.
6. Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule. Préciser la fréquence des oscillations que ressentirait un passager.
7. A quelle(s) allure(s) ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé ? Pour quelles raisons ?
8. A la lueur des résultats obtenus, proposer un moyen de ralentissement des véhicules à l'entrée des zones urbaines.



### Exercice 4 : Oscillateurs couplés, mise en équation

On étudie le dispositif suivant constitué de 3 ressorts linéaires de raideurs respectives ( $k$ ,  $K$  et  $k$ ) liés à deux masses identiques  $m$ , mobiles sur l'axe  $Ox$ . Les masses se déplacent sans frottement.



Soit  $x_1$  et  $x_2$  les élongations des deux masses à partir de leur position d'équilibre.

1. Ecrire les équations différentielles couplées liant  $x_1$  et  $x_2$ .
2. On suppose pour  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  des solutions sinusoïdales du type  $x_i = X_i \cos(\omega t + \phi_i)$ . Déterminer les pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  permises pour ce système.

### Exercice 5 : La couleur bleue du ciel

Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  est supposé galiléen. Le modèle de l'électron élastiquement lié proposé par Thomson présente les électrons de la couche externe d'un atome comme des oscillateurs harmoniques excités par une onde lumineuse provenant du Soleil. Celle-ci est caractérisée par un champ électrique de pulsation  $\omega$  de la forme :  $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ .

Chaque électron  $M$ , de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ , est supposé élastiquement lié au noyau de l'atome situé à l'origine  $O$ . Il est ainsi soumis à une force de rappel comparable à celle d'un ressort de raideur  $k$  :  $\vec{F}_e(t) = -k \vec{OM}(t)$  avec  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ .

Le noyau est supposé fixe dans le référentiel terrestre car beaucoup plus lourd que l'électron. Lors de son mouvement, l'électron rayonne une énergie électromagnétique prélevée sur son énergie mécanique. Cet amortissement du déplacement de l'électron se traduit par une force de freinage de type visqueux :  $\vec{F}_f(t) = -h\nu(M/\mathfrak{R}_g)$ .

A l'échelle atomique, le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique excitatrice :  $\vec{F}(t) = q\vec{E}(t)$ .

L'oscillateur harmonique est caractérisé par sa pulsation propre  $\omega_0$  et son facteur de qualité  $Q$ . On pose  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$ .

1. Montrer que lorsque le régime est sinusoïdal établi, le mouvement de l'électron, qui obéit aux lois de la mécanique classique, a lieu selon l'axe  $(0; \vec{e}_x)$ .
2. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de  $M$  dont  $x(t)$  est solution. La normaliser.
3. Etablir l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation :  $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ . Déterminer son amplitude  $X_m$  et son avance de phase  $\varphi$  par rapport au champ électrique exciteur. Quel est le domaine de variation de  $\varphi$  ?
4. La lumière provenant du Soleil est composée de radiations dont le spectre visible s'étale dans un domaine de longueurs d'onde allant de  $\lambda_{bleu} = 400nm$  à  $\lambda_{rouge} = 800nm$ .

Déterminer le domaine des pulsations  $\omega$  du champ électrique supposé d'amplitude constante.

En déduire une expression simplifiée du vecteur position  $\vec{OM}(t)$  de l'électron en fonction de  $\vec{E}_0$ ,  $e$ ,  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega$  et  $t$ .

5. Sachant qu'un électron accéléré rayonne dans toutes les directions une puissance lumineuse moyenne  $\langle P \rangle$  proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi la couleur du ciel est bleue.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; h = 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} ; k = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Travaux dirigés de Mécanique n°6**
**Exercice 1 : Barrière électrique et barrière magnétique**

1. *Barrière électrique* : il règne un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  entre les plans  $x=0$  et  $x=a$  et un champ nul partout ailleurs. Des particules de charge  $q>0$ , de masse  $m$  arrivent de l'infini du côté des  $x>0$  avec des vitesses identiques  $\vec{v}_0$  portées par l'axe  $Ox$ . Quelle est la condition sur  $v_0$  pour que les particules ne puissent pas franchir cette barrière de potentiel ?
2. *Barrière magnétique* : Entre les plans  $x=0$  et  $x=a$  règne maintenant un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ . Même question.

**Exercice 2 : Particule chargée dans un champ B et avec frottements fluides.**

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q=-e<0$  se trouve initialement en un point 0 avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

Elle se déplace dans un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  et subit une force de frottement fluide de la forme  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$  avec  $\lambda$  une constante positive.

1. Quel est le mouvement (la trajectoire et vitesse) de la particule si  $\lambda=0$  ? Représenter la trajectoire.
2. On prend maintenant  $\lambda \neq 0$  mais faible. Représenter, sans calcul supplémentaire, la nouvelle trajectoire.
3. Déterminer les équations différentielles du mouvement.
4. On pose  $\underline{u} = x + jy$ ,  $\omega = \frac{eB}{m}$  et  $\tau = \frac{m}{\lambda}$ . Déterminer  $\underline{u}(t)$ . Comment calculer  $x(t)$  et  $y(t)$  ? Préciser la position finale de la particule.

**Exercice 3 : Déflexion électronique.**

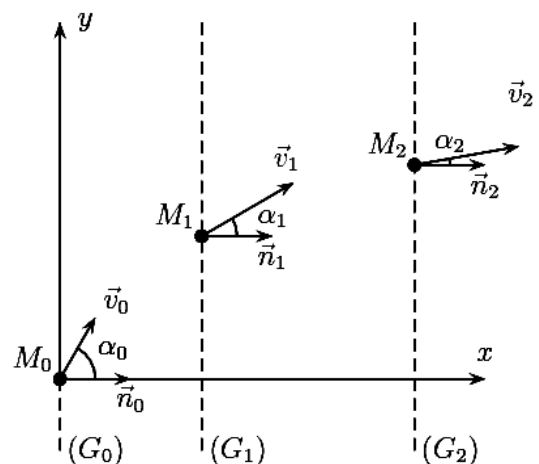
Dans un espace où il existe un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ ,  $(G_0)$ ,  $(G_1)$  et  $(G_2)$  sont trois grilles verticales protégées aux potentiels respectifs  $U_0$ ,  $U_1$  et  $U_2$  tels que  $U_0=0V$  et  $U_2>U_1>0$  pour le moment.

Au temps initial de l'expérience, un électron (de masse  $m$  et de charge  $q=-e$ ) traverse  $(G_0)$  en  $M_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

On note  $\vec{n}_0$  le vecteur unitaire de la normale à  $(G_0)$  en  $M_0$  et  $\alpha_0$  l'angle  $(\vec{n}_0, \vec{v}_0)$ .

Puis l'électron traverse successivement  $(G_1)$  en  $M_1$  avec  $\alpha_1$  l'angle  $(\vec{n}_1, \vec{v}_1)$  et en  $M_2$  avec  $\alpha_2$  l'angle  $(\vec{n}_2, \vec{v}_2)$ .

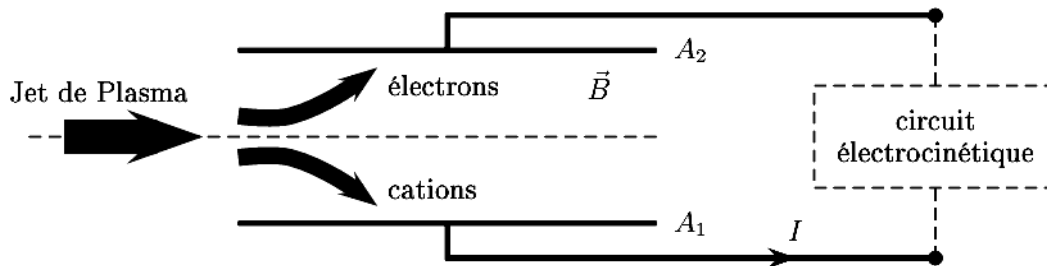
1. Justifier que  $\vec{E}$  est orthogonal aux grilles.
2. Montrer que la projection de la quantité de mouvement de l'électron sur l'axe  $(M_0, y)$  se conserve au cours du mouvement.
3. En déduire l'expression de  $\alpha_i$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $v_0$ ,  $\alpha_0$  et  $U_1$ .



- On suppose la vitesse  $v_0$  négligeable par rapport à  $v_1$ . Quelle est la relation entre  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $U_1$  et  $U_2$ ? Voyez-vous une analogie? Quel est l'intérêt d'un tel système?
- Etudier le cas où  $U_2 = U_1 \sin^2 \alpha_1$ . Que se passe-t-il si  $U_2 < U_1 \sin^2 \alpha_1$  (Cette fois,  $U_2 < U_1$ ).

### Exercice 4 : Générateur magnétohydrodynamique

On envisage le dispositif schématisé sur la figure :  $A_1$  et  $A_2$  sont des armatures métalliques planes perpendiculaires au plan de la figure, distantes de  $D$ .



#### Principe de fonctionnement :

Un dispositif non représenté ionise des gaz de combustion d'hydrocarbures pour produire un jet de plasma, mélange d'ions positifs et d'électrons.

Lorsque ce plasma subit le champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme entre les armatures, les électrons et les cations sont déviés de part et d'autre de la direction initiale du jet.

Recueillis par l'armature  $A_2$ , les électrons peuvent alors circuler dans le circuit électrocinétique pour rejoindre l'armature  $A_1$  : on a donc réalisé un générateur qui fait circuler un courant conventionnel d'intensité  $I$  de  $A_1$  vers  $A_2$  dans le circuit :  $I \geq 0$ .

On se propose de déterminer la force électromotrice de ce générateur : comme on sait qu'il s'agit de trouver sa tension à vide, on envisage dans la suite le dispositif de la figure, mais sans connecter le générateur à un circuit : il ne fournit donc aucun courant,  $I=0$ .

- Reproduire la figure ci-dessus et indiquer la direction et le sens du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ . On justifiera soigneusement.
- Les armatures étant initialement déchargées, le champ  $\vec{B}$  est appliqué à partir de  $t=0$  au jet de plasma. Expliquer sans calcul ce qui se passe au niveau des armatures  $A_1$  et  $A_2$  ; en déduire qualitativement l'évolution vers un régime permanent dans lequel le jet de plasma traverse l'espace entre les plaques sans être dévié.
- Montrer que ce régime permanent correspond à l'existence entre  $A_1$  et  $A_2$  d'un champ électrique que l'on exprimera en fonction du champ  $\vec{B}$  et de la vitesse  $\vec{v}$  des particules du jet.
- Application numérique :  $v=500\text{m.s}^{-1}$ ,  $B=2\text{T}$ ,  $D=1\text{cm}$  ; en supposant le champ uniforme entre les armatures, calculer la tension à vide  $V_{A1}-V_{A2}$ .

**Travaux dirigés de Mécanique n°7**
**Exercice 1 : Non conservation de l'énergie mécanique**

Au cours d'une de ses aventures, Indiana Jones se retrouve glissant parfaitement sur un plan horizontal verglacé, lié par un filin inextensible et de masse négligeable à un poteau d'axe vertical placé en O. Le fil ne s'enroule pas sur le poteau mais glisse autour sans frottement.

Pour simplifier, on assimile notre héros à un point matériel A de masse  $m$ .

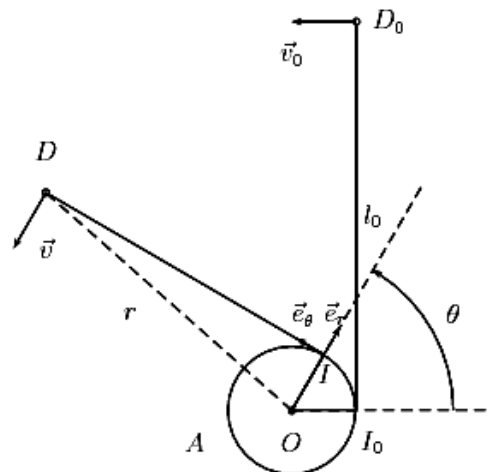
1. Indiana Jones tourne autour du poteau à la distance  $l = OA$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$  dans le référentiel lié au plan, supposé galiléen. Quelle est la nature de son mouvement ? Exprimer le module  $T$  de la tension du filin.
2. Après calcul, notre héros décide, pour sortir de sa situation, de "remonter" lentement le long du fil.
  - a. Montrer qu'au cours de l'opération son moment cinétique par rapport à O reste constant.
  - b. En déduire la vitesse finale  $v'$  d'Indiana Jones en A' tel que  $OA' = \frac{l}{2}$ .
  - c. Exprimer la variation d'énergie mécanique au cours de la remontée. Du point de vue énergétique, quel a été le rôle de notre héros ?
3. Discuter de ce qui va arriver si il continue sa remontée.

**Exercice 2 : Le royaume du crâne de cristal.**

Pour son nouvel opus, Indiana Jones a gagné en expérience, mais aussi en âge. Il cherche à renouveler ses cascades pour que celles-ci soient plus sûres mais surtout moins fatigantes à réaliser. Le filin est maintenant accroché en un point du poteau (considéré comme cylindrique de rayon R) et s'enroule autour de ce dernier. On note  $l(t)$  la longueur de filin non enroulée à un instant t.

On suppose que le filin reste tendu au cours du mouvement.

1. Donner la relation entre  $l_0$ ,  $l$ ,  $R$  et  $\theta$ .
2. Montrer que :  $\vec{v} = -(l_0 - R\theta) \dot{\theta} \vec{e}_r$ .
3. Montrer que la norme de la vitesse est constante.
4. Montrer que  $\theta$  vérifie l'équation  $\frac{R\theta^2}{2} - l_0\theta + v_0 t = 0$ . En déduire que  $\theta(t) = \frac{l_0}{R} - \frac{\sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}}{R}$ .
5. A l'aide du TMC, déterminer la norme de la tension de filin en fonction de  $t$ ,  $m$ ,  $l_0$ ,  $R$  et  $v_0$ .
6. Cette cascade est-elle vraiment plus sûre ?


**Exercice 3 : L'atome de Bohr**

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton O, de masse  $m_p$  et de charge  $+e$ , et d'un électron M, de masse  $m_e \ll m_p$  et charge  $-e$ , ayant un mouvement circulaire uniforme de rayon  $r$  et de vitesse  $v$ , autour de O.

Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron est quantifié :  $L_0(M) = n \frac{h}{2\pi}$ , où  $n$  est un entier et  $h$  est la constante de Planck.

Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

- Déterminer une relation entre  $r$ ,  $v$ ,  $m$ ,  $n$  et  $h$ .
- Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique  $F = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ , déterminer une nouvelle relation entre  $r$  et  $v$ .
- En déduire que  $r$  se met sous la forme  $n^2 r_0$  ; on calculera alors  $r_0$ .
- Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme :  $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$ .
- En supposant que l'électron est dans son état fondamental ( $n=1$ ), calculer la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).

Données :  $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;  $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  ;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

#### Exercice 4 : Pendule de Holweck - Lejay.

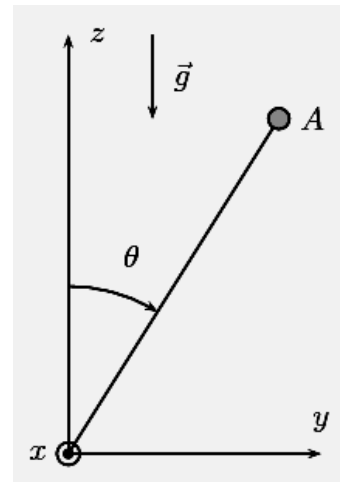
Une masse ponctuelle  $m$  est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur  $L=OA$ , articulée en O et mobile dans un plan vertical.

Un ressort spirale (non représenté sur la figure) exerce sur cette tige un couple de rappel équivalent à un moment de force dont la projection sur Ox est  $M_{Ox} = -C\theta$ .

- Déterminer, par analogie avec un ressort à spires de raideur  $k$  et déformé d'une longueur  $x$ , l'énergie potentielle élastique du ressort spirale de constante de raideur  $C$  et déformé d'un angle  $\theta$ .
- A quelle condition, la position  $\theta=0$  correspond-elle à un équilibre stable ?
- Si cette condition est vérifiée, calculer la période  $T$  des petites oscillations autour de  $\theta=0$  et mettre

$T$  sous la forme  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{G-g}}$ . On donnera l'expression de  $G$ .

- Calculer  $\frac{\Delta T}{T}$  la variation relative de  $T$  si  $g$  varie de  $\Delta g$ . Voyez-vous une application ?



## Travaux dirigés de Mécanique n°8

### Exercice 1 : Premier vol habité (par un homme)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Youri Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse  $m = 4725\text{kg}$ . Les altitudes au périégée  $P$  et à l'apogée  $A$  étaient  $z_P = 180\text{km}$  et  $z_A = 327\text{km}$ .

Exprimer la vitesse  $v$  du satellite en fonction de son altitude  $z$ , de  $z_P$ ,  $z_A$ ,  $M_T$ ,  $R_T$  (masse et rayon de la Terre) et de  $G$ , la constante de gravitation.

Calculer  $v$  en  $P$  et en  $A$ .

### Exercice 2 : Satellite et frottements.

Un satellite de masse  $m$  est placé sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$  contenue dans le plan équatorial de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{\text{géo}}$  considéré comme galiléen.

- Déterminer la vitesse  $v_0$  du satellite, l'énergie potentielle  $E_{p0}$ , cinétique  $E_{c0}$  et mécanique  $E_{m0}$  du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation  $G$ , de la masse de la Terre  $M_T$  et des données.
- Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point  $P$  de latitude  $\lambda$ . Sa vitesse est la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e$  due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon  $R_T$ . Déterminer  $E_{p1}$ ,  $E_{c1}$  et  $E_{m1}$  du satellite au point  $P$ . Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir  $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$ . Où doit-on placer les bases de lancement pour que  $\Delta E$  soit minimale ?
- On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant  $R_T$ , il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique  $E_m$  diminue avec le temps selon la loi  $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$ . Quel est le signe de  $\alpha$ ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de  $t$ , le rayon  $r$  de la trajectoire, et la vitesse  $v$  du satellite. Comment  $v$  varie-t-elle ? Commentez.

### Exercice 3 : Troisième loi de KEPLER.

- Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon  $a = 150.10^6\text{km}$  et que la constante de gravitation  $G = 6,67.10^{-11}\text{SI}$ , calculer la masse du soleil.
- La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 années, en déduire  $a'$  le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars autour du soleil.
- Une comète décrit une orbite elliptique autour du soleil, avec une période de 11,5 années. La distance au périégée est  $r_p = 0,22a$  ( $a$  : distance terre soleil si on considère le mouvement de la Terre autour du Soleil comme circulaire), calculer la distance  $r_A$  de l'apogée au soleil et l'excentricité  $e$  de la trajectoire elliptique.  $e$  étant proche de 1, calculer la vitesse maximale de la comète.
- La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil). Calculer la plus grande distance de cette comète au Soleil et l'excentricité de sa trajectoire.



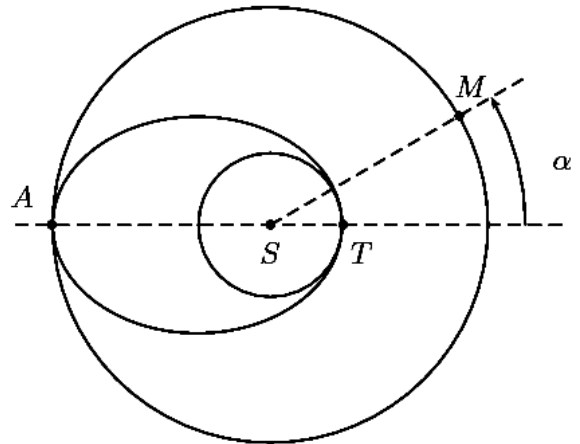
### Exercice 4 : Voyage Terre – Mars.

Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial de masse  $m=1000\text{kg}$  est transféré depuis la Terre  $T$  jusqu'à la planète Mars  $M$ . Ce transfert s'effectue selon une orbite elliptique (ellipse d'HOHMANN) tangente aux deux orbites coplanaires pratiquement circulaires, de  $T$  et  $M$ , de rayons  $r_T=150$  millions de km et  $r_M=230$  millions de km, et dont le soleil est un des foyers.

On négligera l'influence des autres corps et on ne considèrera que l'attraction solaire. Masse du Soleil  $M_s = 2.10^{30}\text{kg}$  et  $G=6,67.10^{-11}\text{SI}$ .

Déterminer en fonction de  $r_T$ ,  $r_M$ ,  $G$  et  $M_s$ , puis calculer :

1. L'excentricité  $e$  et le paramètre  $p$  de l'orbite de transfert d'HOHMANN.
2. La durée  $\tau$  du voyage
3. La variation de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement depuis l'orbite terrestre puis lors de son arrivée aux abords de Mars.
4. L'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert
5. La position que doit avoir  $M$  par rapport à  $T$  à l'instant de départ : angle  $\alpha$ .



### Exercice 5 : Comète parabolique.

Dans le référentiel Héliocentrique, on considère le mouvement d'une comète et celui de la Terre. La masse du Soleil sera notée  $M_0$ . La trajectoire de la Terre est supposée circulaire de rayon  $r_0$ .

1. Calculer, en fonction de  $r_0$ ,  $G$  et  $M_0$ , la vitesse  $v_0$  de la Terre sur son orbite ainsi que sa période de rotation  $T_0$ .
2. La trajectoire de la comète est coplanaire à celle de la Terre, sa distance péricentrique est  $\frac{r_0}{2}$  et sa vitesse maximale est alors  $2v_0$ .

Préciser la forme de la trajectoire de la comète (elliptique, parabolique ou hyperbolique).

Exprimer la vitesse de la comète en fonction de la distance  $r$  qui la sépare du soleil. L'excentricité  $e$  et le paramètre  $p$  de l'orbite de transfert d'HOHMANN.

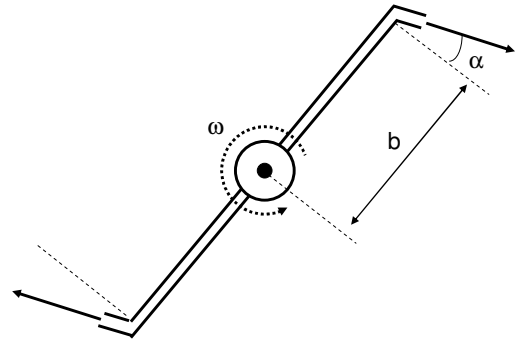
3. L'orbite de la comète croise celle de la Terre en deux points A et B. Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.
4. Quel est le temps  $t$  passé par la comète à l'intérieur de l'orbite terrestre en fonction de  $T_0$ ? Ce temps donne un ordre de grandeur de la durée de visibilité à l'œil nu de la comète depuis la Terre.

$$\text{On donne } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4}{3}.$$

**Travaux dirigés de Mécanique n°9**

**Exercice 1 : Vitesse d'éjection de l'eau dans un tourniquet hydraulique**

Un tourniquet hydraulique destiné à l'arrosage des jardins est constitué de deux bras symétriques, de longueur  $b$ , qui tournent autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire  $\omega$ . L'eau est éjectée par les extrémités des bras avec une vitesse par rapport aux bras égale à  $\vec{u}$  et faisant un angle  $\alpha$  avec la normale aux bras.



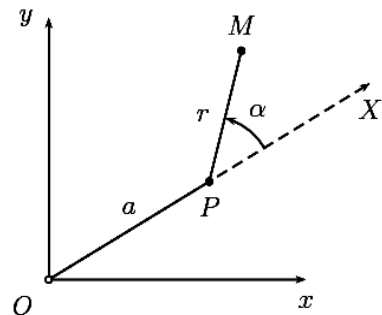
1. Exprimer la vitesse  $\vec{v}$  de l'eau par rapport au référentiel terrestre au moment de l'éjection. On donnera  $\vec{v}$  en fonction de  $u$ ,  $\omega$ ,  $b$  et des vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  de la base polaire.
2. A quelle condition sur  $\omega$ ,  $\vec{v}$  est-elle radiale ?

**Exercice 2 : Tige en rotation.**

Une tige OP de longueur  $a$  tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante et reste dans le plan horizontal  $xOy$ .

A  $t=0$ , la tige est confondue avec  $Ox$ .

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est mobile dans le plan horizontal  $xOy$ .  $M$  est lié à  $P$  par une tige de longueur  $r$  variable (à un ressort par exemple) pouvant tourner librement autour de  $P$ . Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

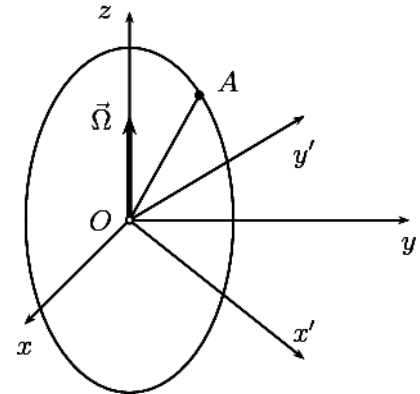


1. On étudie le mouvement de  $M$  dans le référentiel  $\mathfrak{R}_1$  lié à  $P$  en translation circulaire par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathfrak{R}$ . On choisit l'origine de ce référentiel  $\mathfrak{R}_1$  en  $P$ .
  - a. Dessiner les axes  $Px_1, Py_1$  et  $Pz_1$  de ce référentiel sachant qu'à  $t=0$ ,  $Px_1$  est parallèle à  $Ox$ .  $M$  est repéré par l'angle  $\alpha$  et par  $r$  tel que  $\vec{PM} = r\vec{u}_r$ . Que vaut l'angle  $\theta = (\vec{u}_{x_1}, \vec{PM})$  ?  
Placer les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$  de ce système de coordonnées sur le dessin.
  - b. Donner l'expression de la vitesse de  $M$  par rapport à  $\mathfrak{R}_1$  dans la base  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ .
  - c. En déduire l'expression de l'accélération de  $M$  par rapport à  $\mathfrak{R}_1$  dans la base  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ .
  - d. Donner l'expression des accélérations de Coriolis, d'entraînement de  $\mathfrak{R}_1$  par rapport à  $\mathfrak{R}$  et absolue de  $M$  dans cette base  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ .
2. On étudie maintenant le mouvement de  $M$  dans le référentiel  $\mathfrak{R}_2$  lié à la tige et d'axes  $PX, PY$  et  $PZ$ .
  - a. Quelle est la nature du mouvement de  $\mathfrak{R}_2$  par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathfrak{R}$  ?  
 $M$  est repéré par l'angle  $\alpha$  et par  $r$  tel que  $\vec{PM} = r\vec{u}_r$ .
  - b. Calculer l'accélération d'entraînement au point  $M$  dans la base orthonormée directe  $\vec{u}_r, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_z$ .

- c. Calculer l'accélération de Coriolis au point M dans la base orthonormée directe  $\vec{u}_r, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_z$ .
  - d. Calculer l'accélération relative de M dans  $\mathfrak{R}_2$ .
3. Vérifier que les résultats des questions 1. et 2. sont cohérents.

**Exercice 3 : Composition des mouvements.**

Un point A se déplace avec une vitesse angulaire  $\omega$  non constante le long d'un cercle de rayon R, qui lui-même tourne autour d'un diamètre vertical (l'axe Oz) avec une vitesse angulaire constante  $\Omega$ . On note  $\theta$  l'angle  $(Ox'; OA)$  qui situe le point sur le cercle. On appelle  $\mathfrak{R}$  un référentiel fixe auquel est associé le système d'axes Oxyz et  $\mathfrak{R}'$  un référentiel lié au cercle. A ce cercle est associé le système d'axes Ox'y'z (Ox' et Oz étant dans le plan du cercle).



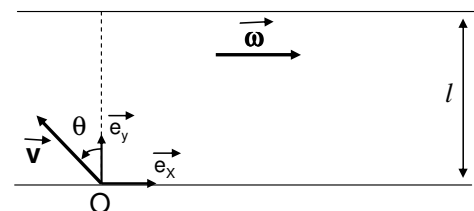
Soient  $\vec{i}', \vec{j}'$  et  $\vec{k}$  les vecteurs unitaires de supports Ox', Oy' et Oz.

1. Exprimer en fonction de  $\theta$  (et ses dérivées), la vitesse relative et l'accélération relative (donc par rapport à  $\mathfrak{R}'$ ) d'abord dans la base polaire puis dans la base  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ .
2. Exprimer vectoriellement, puis dans la même base  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ , la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et celle de Coriolis.
3. En déduire la vitesse et l'accélération du point A par rapport à  $\mathfrak{R}$ , exprimées dans la base de  $\mathfrak{R}'$ .

**Exercice 4 : Traversée d'une rivière**

On étudie la traversée d'une rivière par un bateau à moteur (M). On fait les hypothèses suivantes :

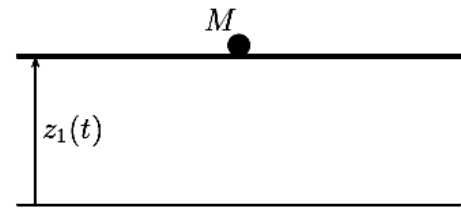
- La rivière a une largeur l
- La vitesse  $\vec{\omega}$  du courant est supposée uniforme  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x$
- Le moteur du bateau maintient une vitesse  $\vec{v}$  constante par rapport au courant faisant un angle  $\theta$  avec la direction  $\vec{e}_y$
- M se trouve en O à  $t=0$ .



1. Etablir l'équation de la trajectoire de M dans le référentiel  $\mathfrak{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  en fonction de  $\theta, v$  et  $\omega$ .
2. Déterminer l'angle  $\theta_m$  rendant minimum le chemin parcouru pendant la traversée. On supposera pour cela  $v > \omega$ .

### Exercice 5 : Masse posée sur un plateau oscillant.

Un plateau horizontal est animé d'un mouvement de translation verticale ( $g=9,81\text{M.s}^{-2}$ ) rectiligne et sinusoïdal (imposé par un moteur) décrit par l'équation  $z_1 = A\cos\omega t$  avec  $A=10\text{cm}$ . Un petit palet est posé à  $t=0$  sur le plateau, sa masse  $m$  est assez faible pour ne pas modifier le mouvement du plateau. On travaillera dans  $\mathcal{R}'$  le référentiel lié au plateau.

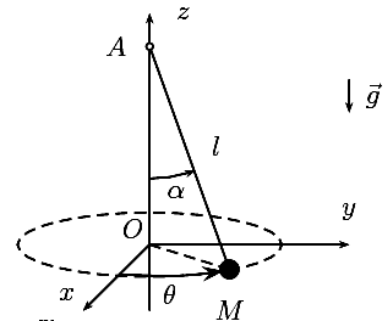


1. En supposant que le palet reste au contact du plateau, faire le bilan des forces appliquées au palet et expliciter une condition sur  $N$ , la norme de la réaction du plateau, qui exprime que le palet reste en contact avec le plateau.
2. Calculer, littéralement et numériquement, la fréquence critique  $\nu_0$  au dessous de laquelle le contact est maintenu pour toute valeur de  $t$ .

### Exercice 6 : Pendule conique.

Un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , lié par un fil inextensible de longueur  $l$  à un point fixe  $A$ , tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $Az$ .

$\alpha$  étant l'angle que forme  $AM$  avec la verticale, calculer l'angle  $\alpha$  et la tension du fil  $T$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $l$  et  $\omega$ .

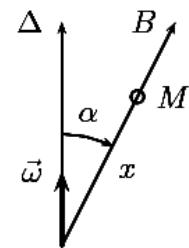


### Exercice 7 : Equilibre d'un anneau sur une tige en rotation.

Une tige  $OB$  de longueur  $l$  est fixée au point  $O$  à un axe  $\Delta$  vertical avec lequel elle fait un angle  $\alpha$  constant (cf. figure). Un petit anneau de masse  $m$ , considéré comme ponctuel, peut se déplacer sans frottement sur la tige  $OB$ . Soit  $M$  sa position repérée par  $OM=x$ .

L'ensemble tourne autour de l'axe  $\Delta$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

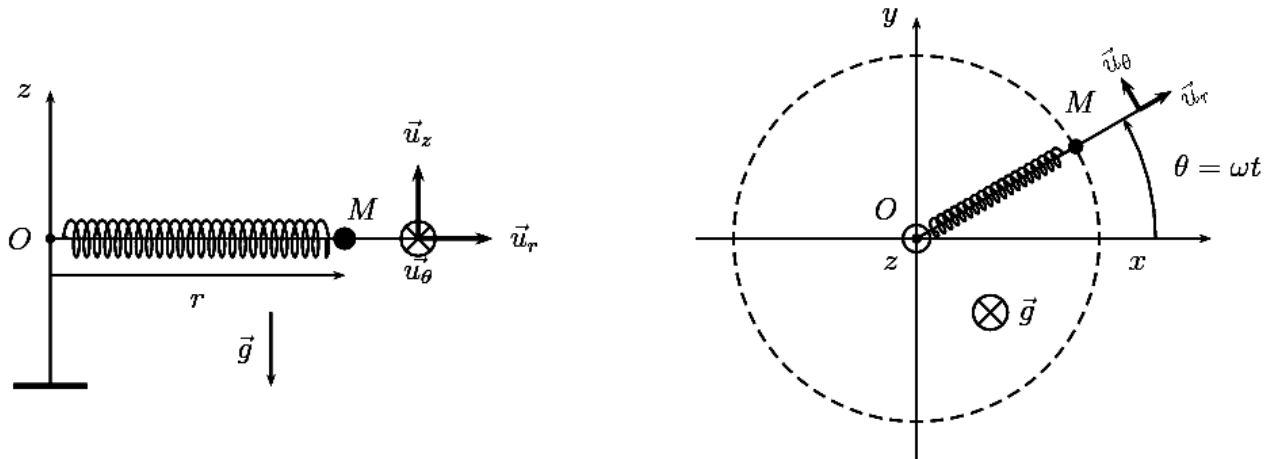
1. Déterminer l'énergie mécanique de l'anneau dans le référentiel tournant.
2. Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur  $OB$ ,  $x_e$  à déterminer, que si la vitesse angulaire est supérieure à une valeur seuil  $\omega_0$  que l'on déterminera.
3. Donner, dans ce cas, les composantes de la réaction  $\vec{R}$  de la tige sur l'anneau dans la base cylindrique.
4. Que se passe-t-il si on écarte légèrement l'anneau de sa position d'équilibre ?



### Exercice 8 : Tige en rotation.

On considère un mobile quasi ponctuel  $M$ , de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement le long d'un axe  $(OM)$  toujours horizontal et mis en rotation uniforme autour de l'axe  $Oz$  vertical. La vitesse angulaire étant nommée  $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ .

Le point  $M$  est relié à  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $r_0$ , on a représenté la base cylindro polaire mobile sur les figures.



1. Mouvement circulaire uniforme : dans un premier temps, on suppose que  $M$  est immobile par rapport à la tige en rotation, c'est à dire qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon  $r_e$  dans le référentiel lié au sol que l'on considèrera comme galiléen. Déterminer l'expression de  $r_e$  en fonction des données. On utilisera le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la tige en rotation.
2. Mouvement hors équilibre : on étudie maintenant le mouvement de  $M$  autour de sa position d'équilibre sur la tige en rotation. On posera  $x = r - r_e$ .
  - a. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $r$ . En déduire celle vérifiée par  $x$ .
  - b. Exprimer la pulsation  $\Omega$  et la période  $T$  des oscillations du cylindre en fonction de  $\omega$ .
3. Peut-on résoudre cet exercice par conservation de l'énergie mécanique ?

**Exercice 9 : Equilibre dans une gouttière parabolique.**

On considère une gouttière d'équation plane  $y=ax^2$  par rapport à un repère  $Oxy$  ( $Oy$  vertical). Dans cette gouttière, on place un point matériel de masse  $m$ . On fait tourner la gouttière autour de l'axe  $Oy$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ .

Trouver la valeur que doit avoir  $\omega$  pour que le point puisse être en équilibre relatif lorsqu'on le déplace en un point quelconque de la gouttière sans vitesse initiale relative.